Des algèbres (co-)Heyting à la triangulation p-adique, et *vice-versa*

Luck Darnière

Lundi 25 novembre 2019

À la mémoire de François Lucas

Table des matières

1 Algèbres co-Heyting et anneaux de fonctions **1**
- 1.1 Anneaux de fonctions . . . 1
- 1.2 Modèle-complétion des algèbres co-Heyting . . . 3

2 triangulation p-adique **5**
- 2.1 Simplexes discrets ou p-adiques . . . 5
- 2.2 Triangulation p-adique et applications . . . 7
- 2.3 Décomposition cellulaire et déformation . . . 7
- 2.4 Monoplexe cellulaire . . . 9

3 Conclusion **11**

1 Algèbres co-Heyting et anneaux de fonctions

1.1 Anneaux de fonctions

$\mathscr{K} = (K, \dots)$ = structure qui enrichit le corps K d'une topologie « modérée ».

Exemples

- $\mathscr{K}$ o-minimale ($K = \mathbb{R}$).
- $\mathscr{K}$ P-minimale ($K = \mathbb{Q}_p$)
- $\mathscr{K}$ C-minimale (K valué alg. clos).
- $\mathscr{K}$ dp-minimale (généralisation...).

V = sous-ensemble définissable de K^m (par exemple semi-algébrique).

A = un anneau de fonctions continues de V dans K.

- Fonctions différentiables.
- Fonctions régulières.
- Fonctions régulues.
- Fonctions sous-analytiques continues.
- Fonctions semi-algébriques continues : $A =: \mathscr{C}_{\mathbf{sa}}(V)$.
- Fonctions définissables continues : $A =: \mathscr{C}_{\mathbf{def}}(V)$.

— *etc.*

L_A = treillis des $\{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ avec les $f_i \in A$.

$L_{\mathscr{C}_{\mathrm{sa}}(V)}$ sera noté $L_{\mathbf{sa}}(V)$.
$L_{\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)}$ sera noté $L_{\mathbf{def}}(V)$.
Dans de *très* nombreux cas, notamment quand $A = \mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)$ ou $A = \mathscr{C}_{\mathrm{sa}}(V)$:

1. L_A est interprétable dans A (*i.e.* $(A/\approx) = L_A$).
2. L_A code la topologie de $\operatorname{Spec} A$ ($L_A \simeq$ {fermés de Zariski de $\operatorname{Spec} A$}).
3. On a une correspondance fonctorielle

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d] & L_A \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, leftrightarrow, "\sim", "\text{homéo}"'] & \operatorname{Spec} L_A \end{tikzcd}$$

4. $A - B := \overline{A \setminus B} \cap V \in L_A$ (pour tous $A, B \in L_A$), ce qui fait de L_A une **algèbre co-Heyting**.

Rappels
Si K, K' sont tous deux algébriquement clos de caractéristique nulle, réel clos ou p-adiquement clos, on sait (Hilbert, Tarski-Seidenberg, Macintyre) que :

1. K, K' ont la même théorie, qui est décidable.
2. Si $K \subseteq K'$ alors $K \preccurlyeq K'$.

Le second point $\Rightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V(K)) \subseteq \mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V(K'))$ et $L_{\mathrm{def}}(V(K)) \subseteq L_{\mathrm{def}}(V(K'))$.

Questions (naïves ?)

1. Les théories de $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)$, $L_{\mathrm{def}}(V)$ sont-elles décidables ?
2. Si $K \preccurlyeq K'$ alors $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V(K)) \preccurlyeq \mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V(K'))$?
3. Si $K \preccurlyeq K'$ alors $L_{\mathrm{def}}(V(K)) \preccurlyeq L_{\mathrm{def}}(V(K'))$?

À savoir

1. Si l'anneau $\mathbb{Z}$ est interprétable dans une structure $\mathscr{M}$ (*i.e.* $\mathbb{Z} = (\mathscr{M}/\approx)$) alors la théorie de $\mathscr{M}$ est indécidable.
2. Si $L_{\mathrm{def}}(V)$ a une théorie indécidable, alors $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)$ aussi.
3. Si $L_{\mathrm{def}}(V(K)) \not\preccurlyeq L_{\mathrm{def}}(V(K'))$ alors $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V(K)) \not\preccurlyeq \mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V(K'))$.

Théorème 1 (Grzegorczyk 1951)**.** *Pour tout $m \geqslant 2$, l'anneau $\mathbb{Z}$ est interprétable dans $L_{sa}(\mathbb{R}^m)$.*
La théorie de $L_{sa}(\mathbb{R}^m)$ (et a fortiori celle de $\mathscr{C}_{sa}(\mathbb{R}^m)$) est donc indécidable.

Théorème 2 (Astier 2013)**.** *Dans le cas o-minimal, si $K \preccurlyeq K'$ alors $L_{def}(K^m) \preccurlyeq L_{def}(K'^m)$.*

Théorème 3 (Darnière, Tressl 2019)**.** *Soient $\mathscr{K}$ une structure o-minimale sur un corps K, $V \subseteq K^m$ définissable, et x_0 un point de V tel que* $\dim(V, x_0) \geqslant 2$.
Alors $\{f \in \mathscr{C}_{def}(V) \,/\, f(x_0) \in \mathbb{Z}\}$ est (uniformément) définissable dans $\mathscr{C}_{def}(V)$. La relation $f \approx g$ ssi $f(x_0) = g(x_0)$ est (uniformément) définissable dans $\mathscr{C}_{def}(V)$. En conséquence :

1. *La théorie de $\mathscr{C}_{def}(V)$ est indécidable, car on y interprète l'anneau $\mathbb{Z}$.*
2. *Si $K_0 \preccurlyeq K$, avec K_0 archimédien et pas K, alors $\mathscr{C}_{def}(V(K_0)) \not\preccurlyeq \mathscr{C}_{def}(V(K))$.*

De manière moins formelle : on peut déceler dans la structure d'anneau de $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)$ si le corps K est archimédien ou non (ce qu'on ne sait pas faire dans $\mathscr{K}$).

Théorème 4 (Darnière, Tressl 2019). *Soient $\mathcal{K}$ une structure dp-minimale sur un corps valué K non algébriquement clos, $V \subseteq K^m$ définissable, et x_0 un point de V tel que* $\dim(V, x_0) \geqslant 2$. *Soit $t \in K$ tel que $v(t) \neq 0$.*
Alors $\{f \in \mathscr{C}_{def}(V) \,/\, f(x_0) \in t^{\mathbb{Z}}\}$ est (uniformément) définissable dans $\mathscr{C}_{def}(V)$. La relation $f \approx g$ ssi $f(x_0) = g(x_0)$ est (uniformément) définissable dans $\mathscr{C}_{def}(V)$. En conséquence :

1. *La théorie de $\mathscr{C}_{def}(V)$ est indécidable, car on y interprète l'anneau $\mathbb{Z}$.*
2. *Si $K_0 \preccurlyeq K$, avec $v(K_0^\times) = \mathbb{Z} \neq v(K^\times)$, alors $\mathscr{C}_{def}(V(K_0)) \not\preccurlyeq \mathscr{C}_{def}(V(K))$.*

En particulier, si $\mathcal{K}$ est P-minimale, on peut décèler ici dans l'anneau $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)$ si $v(K) = \mathbb{Z}$ ou non (ce qu'on ne peut pas faire dans $\mathcal{K}$).

Question
Dans les cas précédents, l'anneau $\mathbb{Z}$ est interprétable dans $\mathscr{C}_{\mathrm{def}}(V)$. Qu'en est-il dans $L_{\mathrm{def}}(V)$, en dehors du cas o-minimal ?

Théorème 5 (Darnière 2019). *K corps p-adiquement clos, $V \subseteq K^m$ semi-algébrique.*

1. *La théorie de $L_{sa}(V)$ est décidable (elle élimine même les quantificateurs dans une extension par définition du langage des treillis).*
2. *Si $K \preccurlyeq K'$ alors $L_{sa}(V(K)) \preccurlyeq L_{sa}(V(K'))$.*

Remarque
La théorie de $L_{\mathrm{sa}}(V)$ ne dépend que de $\dim V$, du nombre de points isolés de V, et de la façon dont les composantes pure-dimensionnelles de V s'intersectent.
En particulier, la théorie de $L_{\mathrm{sa}}(K^m)$ ne dépend que de m (pas de p !).

1.2 Modèle-complétion des algèbres co-Heyting

Soit $V \subseteq K^m$ semi-algébrique, voire définissable dans une structure $\mathcal{K}$ dp-minimale sur un corps topologique K. Soit $d = \dim V$.

On enrichit la structure de $L_{\mathrm{def}}(V)$ comme suit.

— Pour $0 \leqslant i \leqslant d$, la **composante i-pure** de $A \in L_{\mathrm{def}}(V)$ est définie par

$$C^i(A) := \overline{\{a \in A \,/\, \dim(A, a) = i\}} \cap A.$$

Ceci détermine une fonction $C^i : L_{\mathrm{def}}(V) \to L_{\mathrm{def}}(V)$.

— Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, on note At_k l'ensemble des $A \in L_{\mathrm{def}}(V)$ formés de k points de V.

La structure $(L_{\mathrm{def}}(V), (C^i)_{i \leqslant d})$ est un exemple typique de **treillis d-échelonné**.
En y ajoutant les prédicats At_k on obtient un **treillis d-échelonné atomique**.

Autres exemples
Bien d'autres treillis admettent aussi une (unique) structure de treillis d-échelonné atomique.

— Les treillis finis.
— Les algèbres de Boole (finies ou non).
— Le treillis des fermés d'un espace noethérien de dimension de Krull $\leqslant d$.

Théorème 6 (Darnière 2004)**.** *La théorie des treillis d-échelonnés atomiques (dans le langage des algèbres co-Heyting augmenté des fonctions C^i et des prédicats At_k) admet une « modèle-complétion ». Celle-ci est axiomatisée par :*

Caténarité *$(\forall r < q < p \leqslant d)$*

$\forall a, c, C^r(c) \leqslant C^p(a) \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists b, C^r(c) \leqslant C^q(b) \leqslant C^p(a)$ *et* $C^q(b) \neq \mathbf{0}$.

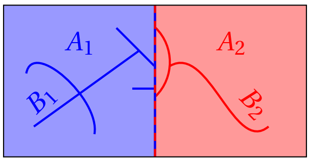
Découpage

$\forall a \neq \mathbf{0}, \forall b_1, b_2$ *tels que* $b_1 \vee b_2 \ll a$, *si* $C^0(a) = \mathbf{0}$ *alors*

$$\exists a_1, a_2 \neq \mathbf{0} \quad \begin{cases} a_1 \geqslant b_1 \text{ et } a_2 \geqslant b_2 \\ a - a_1 = a_2 \text{ et } a - a_2 = a_1 \\ a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 \end{cases}$$

Question

$L_{\mathrm{def}}(V)$ satisfait en général l'axiome de caténarité (conséquence de la topologie modérée de la structure dp-minimale $\mathscr{K}$ sur K). Qu'en est-il pour l'axiome de découpage ?



Étant donné $A \in L_{\mathrm{def}}(V)$ non vide tel que $C^0(A) = \emptyset$ (*i.e.* A n'a pas de points isolés) et $B_1, B_2 \in L_{\mathrm{def}}(V)$ tels que $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ est dense dans A, il faudrait trouver $A_1, A_2 \in L_{\mathrm{def}}(V)$ non vides, contenant B_1 et B_2 respectivement, et tels que :

$$A_1 = \overline{A \setminus A_2} \qquad\qquad A_2 = \overline{A \setminus A_1} \qquad\qquad A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$$

En particulier, $A_1 \cup A_2 = A$.

Remarque

Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ on aura $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, et toujours $A_1 \cup A_2 = A$, ce qui n'est pas possible si A est pas connexe.

Si K est p-adiquement clos, seuls les singletons de V sont connexes. Or l'axiome de découpage ne s'applique pas aux singletons. Il n'est donc pas impossible que $L_{\mathrm{def}}(V)$ le satisfasse. C'est en tout cas le seul candidat !

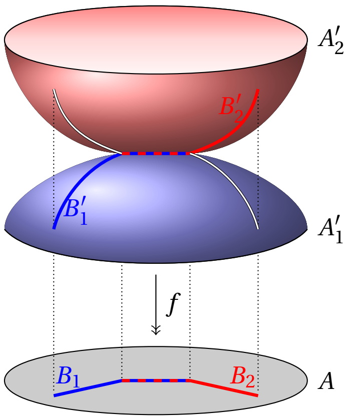
Le seul candidat, vraiment ?

Théorème 7 (Darnière, Junker 2011-2018)**.** *Toute algèbre co-heyting existentiellement close satisfait l'axiome de découpage.*

Cette approche a permis d'apporter de nouvelles preuves de l'existence de modèle-complétions pour certaines théories équationnelles d'algèbres de Heyting localement finies, avec des résultats nouveaux d'axiomatisation (toutes basées sur des variantes des axiomes de caténarité et de découpage).

Pour prouver que toute algèbre co-Heyting existentiellement close satisfait l'axiome de découpage il faut montrer que, étant donnés $a, b_1, b_2 \in L$ tels que $b_1 \vee b_2 \leqslant a \neq \mathbf{0}$ et $a - (b_1 \vee b_2) = a$, on peut trouver dans une extension L' de L, un découpage approprié de a (ou plutôt de l'image de a dans L').

Dans le cas géométrique, où $L = L_{\mathrm{def}}(V)$ et $a = A \subseteq V$, cela se fait en recollant des copies de A comme ci-dessous.



$Z \mapsto f^{-1}(Z)$ définit un plongement de $L_{\text{def}}(V)$ dans $L_{\text{def}}(V')$.

A, B_1, B_2 s'identifient à leurs images A', B'_1, B'_2 par ce plongement.

Dans $L_{\text{def}}(V')$, A' se laisse découper en deux fermés A'_1 et A'_2 qui s'intersectent le long de $B'_1 \cap B'_2$.

2 triangulation p-adique

2.1 Simplexes discrets ou p-adiques

Pour toute la suite :

- $K :=$ un corps p-adiquement clos fixé.
- $R :=$ l'anneau de la valuation p-adique.
- $v :=$ la valuation p-adique.
- $|\,| :=$ une notation multiplicative pour la valuation :

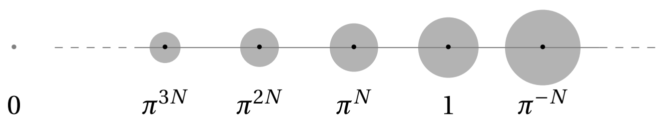
$$|x| \leqslant |y| \iff v(x) \geqslant v(y)$$

$$|x| = |0| \iff x = 0 \quad ; \quad |xy| = |x|\,|y| \quad ; \quad |x+y| \leqslant \max(|x|, |y|)$$

- $\pi :=$ un élément tel que $v(\pi) = 1$.

Pour simplifier on se limite ici au cas où $v(K^\times) = \mathbb{Z}$
Pour tous $N, M \in \mathbb{N}^\times$ on considère les sous-groupes suivants de $K^\times$, semi-algébriques, ouverts-fermés et d'indices fini dans $K^\times$.

- $P_N^\times := \{x^N \ / \ x \in K^\times\}$.
- $Q_{N,M}^\times := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \pi^{kN}(1+\pi^M R) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B(\pi^{kN}, \pi^{kN+M})$.



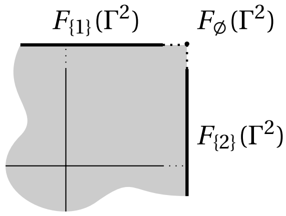
Remarque
$Q_{N,M}^\times$ est un voisinage semi-algébrique de $\{\pi^{kN}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est d'autant plus petit que N et M sont grands.

Lemme 8. *La fonction $x \mapsto x^e$ est un homéomorphisme de $Q_{1,v(e)+1}^\times$ dans $Q_{e,2v(e)+1}^\times$.*

La réciproque définit une fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{e}}$ sur $Q_{e,2v(e)+1}^\times$.

À savoir
$Q_{N,M}^\times \subseteq Q_{e,2v(e)+1}$, dès que $e|N$ et $2v(e) < M$.

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.
Notons que Γ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$.

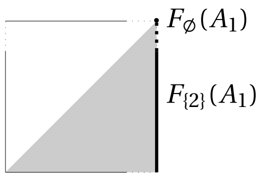


Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

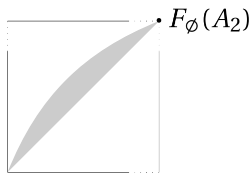
— Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\operatorname{Supp} a := \left\{ i \in \{1, \dots, q\} \;/\; a_i < +\infty \right\}$.
— Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q \;/\; \operatorname{Supp} a = I\}$.
— Pour tout $A \subseteq \Gamma^q$ et tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$:

$$F_I(A) := \left\{ a \in \overline{A} \;/\; \operatorname{Supp} a = I \right\} = \overline{A} \cap F_I(\Gamma^q).$$

S'il est non vide, $F_I(A)$ est appelé **face** de A de support I.



$A_1 \,:\, 0 \leqslant y \leqslant x$



$A_2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x$

— $f : X \subseteq \Gamma^q \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ est **largement continue** si elle se prolonge en une fonction continue sur $\overline{X}$.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est un **polytope discret** si
— $q = 0$ et $A = \mathbb{Z}^0$, ou ;
— $q \geqslant 1$, le projeté $\widehat{A}$ de A sur $\mathbb{Z}^{q-1}$ est un polytope discret, et A est l'ensemble de $(x, t) \in \widehat{A} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$\nu(x) \leqslant t \leqslant \mu(x)$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ sont des fonctions $\mathbb{Q}$-affines (ou $+\infty$) positives et largement continues.

Ceci se generalise à $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, en identifiant $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\operatorname{Card} I}$.

Proposition 8.1. *Toutes les faces d'un polytope discret A sont des polytopes discrets.*
Elles forment un complexe qui partitionne $\overline{A}$.

Si les faces d'un polytope discret A forment une chaine pour l'ordre de spécialisation, on dit que A est un **simplexe discret**.

2.2 Triangulation p-adique et applications

Les **polytopes** (resp. **simplexes**) p**-adiques** sont les parties de K^q de la forme $v^{-1}(S) \cap Q_{1,M}^{\times}$ où $S \subseteq \Gamma^q$ est un polytope (resp. simplexe) discret.

Fait
Les simplexes p-adiques héritent de toutes les bonnes propriétés des simplexes discrets, notamment en ce qui concerne leurs faces.

Un **complexe simplicial** p-adique est une famille finie $\mathscr{S}$ de simplexes p-adiques 2 à 2 disjoints (éventuellement pris dans différentes copies de R^q), qui ne se touchent que le long de leurs faces. On note $\biguplus \mathscr{S}$ leur réunion disjointe.

Théorème 9 (Triangulation p-adique (simplifiée))**.**

1. *Pour tout ensemble semi-algébrique $X \subseteq K^m$, il existe un complexe simplicial p-adique $\mathscr{S}$ et un homéomorhisme semi-algébrique $\varphi : \biguplus \mathscr{S} \to X$.*
2. *Étant données des fonctions semi-algébriques $\theta_1, \dots, \theta_r : X \to K$, on peut exiger de plus que les valuations des $\theta_i \circ \varphi(y)$ soient des fonctions $\mathbb{Z}$-affines des valuations des coordonnées de $y \in \biguplus \mathscr{S}$.*

Corollaire 10. *Le cardinal de l'ensemble des classes d'homéomorphismes des ensembles semi-algébriques sur K est le cardinal du groupe des valeurs $v(K^{\times})$.*

Corollaire 11. *Soient $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Si B est fermé dans A, alors il existe une rétraction semi-algébrique $\rho : A \to B$.*

Corollaire 12. *Soit $A \subseteq K^m$ une partie semi-algébrique relativement ouverte sans point isolé. Soient $X_1, \dots, X_r$ des fermés semi-algébriques tels que $X_1 \cup \cdots \cup X_r = \partial A$.*
Il existe une partition de A en parties semi-algébriques $A_1, \dots, A_r$ telles que $\partial A_k = X_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.

Corollaire 13. *Muni des fonctions C^i et des prédicats At_k, $L_{sa}(V)$ est un modèle de la modèle-complétion des treillis d-échelonnés atomiques.*

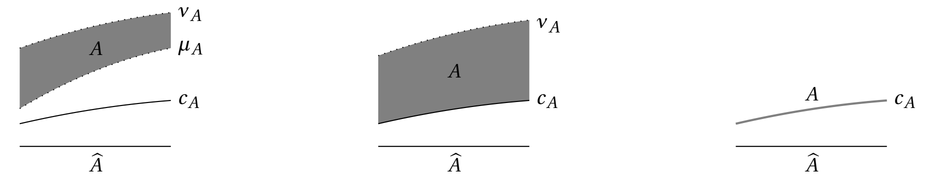
Remarque
Les fonctions C^i et les prédicats At_k sont définissables dans $L_{\mathrm{sa}}(V)$. Les résultats de décidabilité et de plongement élémentaire pour les $L_{\mathrm{sa}}(V)$ en découlent.

2.3 Décomposition cellulaire et déformation

Soit $G = P_N^{\times}$ ou $Q_{N,M}^{\times}$, on appellera **cellule** modulo G l'ensemble A des $(x, t) \in R^d \times K$ tels que

$$|\mu_A(x)| \leqslant |t - c_A(x)| \leqslant |\nu_A(x)| \quad \text{et} \quad t - c_A(x) \in \lambda_A G$$

où $\lambda_A \in K$ et $c_A, \mu_A, \nu_A : X \subseteq R^m \to K$ sont des fonctions semi-algébriques, avec μ_A, ν_A jamais nulles ou identiquement nulles sur X.



$|0| < |\mu_A| < |\nu_A|$ $\quad$ $|0| = |\mu_A| < |\nu_A|$ $\quad$ $|0| = |\mu_A| = |\nu_A|$

Le projeté $\widehat{A}$ de A sur R^m (en général $\widehat{A} = X$) est appelé le **socle** de A.
Si c_A, μ_A, ν_A se prolongent en fonctions continues sur l'adhérence de $\widehat{A}$, on dira qu'elles sont **largement continues** (et que A elle-même l'est aussi).

Théorème 14 (Denef 1984)**.** *Tout ensemble semi-algébrique $S \subseteq R^m$ admet une partition finie en cellules modulo $P_N^\times$, pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$.*

Pour chaque $e \in \mathbb{N}^\times$, soit $U_e = \{x \in K^\times \ / \ x^e = 1\}$.

Théorème 15 (Denef 1984, Cluckers 2004)**.** *Soient $\theta_1, \ldots, \theta_r : X \subseteq K^m \to K$ des fonctions semi-algébriques. Il existe un entier $e \geqslant 1$ ayant la propriété suivante.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers $N, M \in \mathbb{N}^*$ tels que $e|N$ et $M > v(e)$, et une partition finie $\mathscr{A}$ de X en cellules A modulo $Q_{N,M}^\times$ sur chacune desquelles, pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

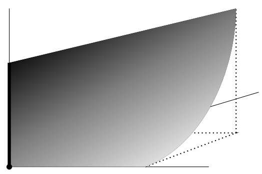
$$\theta_i(x,t) = \chi(x,t) \cdot \big(1 + \pi^n \omega(x,t)\big) \cdot h(x) \cdot \big[\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))\big]^{\frac{\alpha}{e}}$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\chi : A \to U_e$, $\omega : A \to R$ $h : \widehat{A} \to K$ sont des fonctions semi-algébriques (dépendants de i et de A).

Nous dirons que $\mathscr{A}$ est une **préparation** des θ_i en cellules modulo $Q_{N,M}^\times$.

But
Obtenir un résultat similaire avec des cellules largement continues.

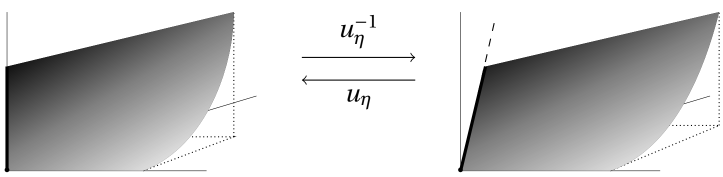
Problème
Selon la forme du domaine X des θ_i, ce n'est pas toujours possible.



$X \ : \ xz = y$

Solution
Utiliser une déformation linéaire $u_\eta : R^{m+1} \to R^{m+1}$, avec $\eta \in R^m$ (arbitrairement petit).

$$u_\eta : (x,t) \mapsto (x + t\eta, t)$$



Après déformation, la triangulation des semi-algébriques dans R^m donne le résultat voulu (première étape de la triangulation dans R^{m+1}).

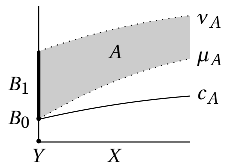
Théorème 16 (Préparation largement continue après déformation)**.** *Soient $\theta_1, \ldots, \theta_r : X \subseteq R^{m+1} \to R$ des fonctions semi-algébriques. Il existe un entier $e \geqslant 1$ ayant la propriété suivante.*
Pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe, pour un certain $N \geqslant 1$ multiple de e, une déformation linéaire u_η de R^{m+1} et, pour un certain $M > 2v(e)$, une partition $\mathscr{A}$ de $u_\eta^{-1}(X)$ en cellules modulo $Q_{N,M}^\times$ largement continues, telle que $\mathscr{A}$ soit une préparation des $\theta_i \circ u_\eta$.

2.4 Monoplexe cellulaire

Si une cellule A est largement continue, son bord ∂A se décompose naturellement en cellules B telles que

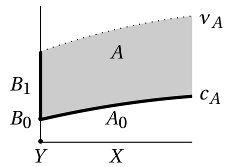
$$(c_B, \mu_B, \nu_B) = (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A \text{ ou } 0)_{|\widehat{B}}$$

Exemples



$B_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)_{|Y}$

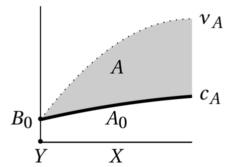
$B_1 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)_{|Y}$



$B_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)_{|Y}$

$B_1 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)_{|Y}$

$A_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)_{|X}$



$B_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)_{|Y}$

$A_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)_{|X}$

J'appelerai ici A_0, B_0, B_1 les **côtés** de A.

$\mathscr{A}$ est un **complexe cellulaire** si $\forall A, B \in \mathscr{A}$,

$$B \subseteq \partial A \implies B = B_0 \text{ ou } B = B_1 \text{ ou } B = A_0.$$

C'est un **monoplexe cellulaire** si, de plus, $\forall A, B, B' \in \mathscr{A}$,

$$B, B' \subseteq \partial A \implies B \subseteq \partial B' \text{ ou } B' \subseteq \partial B \text{ ou } B = B'.$$

But
Partant d'une préparation $\mathscr{A}$ des fonctions $(\theta_i \circ u_\eta)_{i \leqslant r}$ en cellules largement continues, construire une préparation plus fine $\mathscr{E}$ dont les cellules forment un complexe, voire un monoplexe cellulaire.

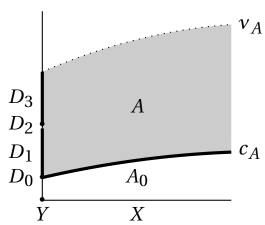
Remarque
La construction d'un tel monoplexe cellulaire est au cœur de la démonstration, par récurrence sur m, du théorème de triangulation p-adique : les complexes simpliciaux p-adiques sont un cas *très* particulier de monoplexes cellulaires.

On construit $\mathscr{E}$ à partir de $\mathscr{A}$, par récurrence sur la dimension des cellules de $\mathscr{A}$.

Problème 1 : préparation
Faire en sorte que les nouvelles cellules de $\mathscr{E}$ forment encore une préparation des θ_i.

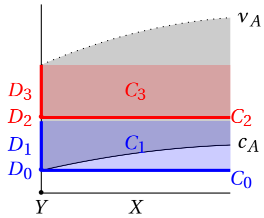
Solution
On sait faire !

Problème 2 : complexe cellulaire



$\mathscr{A} \setminus \{A\}$ forme un monoplexe cellulaire, mais pas $\mathscr{A}$: les cellules D_i sont incluses dans ∂A mais (sauf D_0) n'en sont pas des côtés.

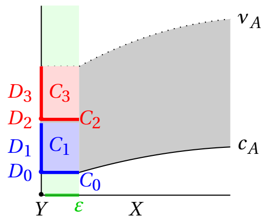
Solution



À l'aide d'une rétraction $\rho : Y \to X$, découper dans A des cellules C_i qui « élargissent » les D_i, et remplacer A par ces cellules.

$$(c_{C_i}, \mu_{C_i}, \nu_{C_i}) = (c_{D_i} \circ \rho, \mu_{D_i} \circ \rho, \nu_{D_i} \circ \rho)$$

Sauf que... ces cellules ne recouvrent pas A (ni ne sont incluses dans A).
Mais si on restreint le socle des C_i à un voisinage assez petit de Y, ce problème disparait.



En effet, si $f(y) \neq 0$ avec f une fonction continue, comme $v(f(y)) \in \mathbb{Z}$ on aura $v(f(x)) = v(f(y))$ dès que x est assez proche de y.

$\forall y \in Y$, $\exists \varepsilon(y) \in K^\times$,
$\forall (x,t) \in X \times K$, si $\|x - y\| \leqslant |\varepsilon(y)|$ alors

$$|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(y)| \qquad \text{et} \qquad |\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(y)|$$

car $t - \bar{c}_A(y) \neq 0$ et $\bar{\nu}_A(y) \neq 0$.
D'où une fonction $\varepsilon : Y \to K^\times$ telle que
$\forall y \in Y$, $\forall (x,t) \in X \times K$, si $\|x - y\| \leqslant |\varepsilon(y)|$ alors

$$|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(y)| \qquad \text{et} \qquad |\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(y)|$$

En particulier (avec $y = \rho(x)$), si $\|x - \rho(x)\| \leqslant |\varepsilon(\rho(x))|$

$$|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \qquad \text{et} \qquad |\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(\rho(x))|$$

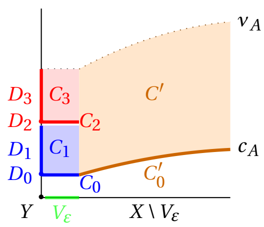
Sur $V_\varepsilon \times K$, avec $V_\varepsilon := \{x \in X \,/\, \|x - \rho(x)\| \leqslant |\varepsilon(x)|\}$ on a donc

$$|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \qquad \text{et} \qquad |\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(\rho(x))|$$

Et donc

$$|0| \leqslant |t - c_A(x)| \leqslant |\nu_A(x)| \iff |0| \leqslant |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \leqslant |\bar{\nu}_A(\rho(x))|$$

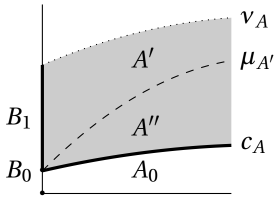
Alors $(x,t) \in A \iff (\rho(x), t) \in \overline{A} \cap (Y \times K) = \bigcup_i D_i \iff (x,t) \in \bigcup_i C_i$.



$\mathscr{E} := \big(\mathscr{A} \setminus \{A\}\big) \cup \{C', C'_0, C_0, C_1, C_2, C_3\}$ forme un complexe cellulaire... mais pas un monoplexe !

Problème 3 : *monoplexe* **cellulaire**

Solution



On coupe A en deux à l'aide d'une fonction intermédiaire : $|0| < |\mu_{A'}| < |\nu_A|$.

3 Conclusion

Merci !

François Lucas, *Raz de Sein*