Triangulation des ensembles semi-algébriques p-adiques

1 Introduction

- Corps p-adiquement clos
- Ensembles semi-algébriques
- Élimination des quantificateurs
- Quelle triangulation ?
- Une triangulation pour quoi faire ?

Exemples

- Toute extension finie K_0 de $\mathbb{Q}_p$.

Exemples

- Toute extension finie K_0 de $\mathbb{Q}_p$.
- La clôture algébrique relative de $\mathbb{Q}$ dans K_0 (pas complet).

Exemples

- Toute extension finie K_0 de $\mathbb{Q}_p$.
- La clôture algébrique relative de $\mathbb{Q}$ dans K_0 (pas complet).
- Le complété pour la valuation t-adique du corps $\bigcup_{n\geqslant 1} K_0((t^{1/n}))$ des séries de Puiseux sur K_0 (groupe de valeurs $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$).

Exemples

- Toute extension finie K_0 de $\mathbb{Q}_p$.
- La clôture algébrique relative de $\mathbb{Q}$ dans K_0 (pas complet).
- Le complété pour la valuation t-adique du corps $\bigcup_{n\geqslant 1} K_0((t^{1/n}))$ des séries de Puiseux sur K_0 (groupe de valeurs $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$).

K est **p-adiquement clos** s'il admet une valuation v telle que :

1. (K, v) est hensélien, de caractéristique nulle.
2. Le corps résiduel de (K, v) est fini, de caractéristique p.
3. Le groupe des valeurs $\mathcal{Z} = v(K^\times)$ est un **$\mathbb{Z}$-groupe** :
   i) $\mathcal{Z}$ a un plus petit élément > 0 (noté 1) ;
   ii) $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Introduction

- Corps p-adiquement clos
- Ensembles semi-algébriques
- Élimination des quantificateurs
- Quelle triangulation ?
- Une triangulation pour quoi faire ?

Soit K un corps quelconque.

$$P_N^{\times} := \{y^N \ / \ y \in K^{\times}\}$$

$A \subseteq K^m$ est **semi-algébrique** s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \cdots = f_r = 0 \ \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^{\times} \text{ et } \cdots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^{\times}$$

avec $f_i, g_i \in K[X_1, \ldots, X_m]$.

Soit K un corps quelconque.

$$P_N^\times := \{y^N \ / \ y \in K^\times\}$$

$A \subseteq K^m$ est **semi-algébrique** s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \cdots = f_r = 0 \ \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^\times \text{ et } \cdots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^\times$$

avec $f_i, g_i \in K[X_1, \ldots, X_m]$.

Remarque

- Si K est algébriquement clos, $g_i \in P_N^\times \iff g_i \neq 0$.

Soit K un corps quelconque.

$$P_N^\times := \{y^N \ / \ y \in K^\times\}$$

$A \subseteq K^m$ est **semi-algébrique** s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \cdots = f_r = 0 \ \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^\times \text{ et } \cdots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^\times$$

avec $f_i, g_i \in K[X_1, \ldots, X_m]$.

Remarque

- Si K est algébriquement clos, $g_i \in P_N^\times \iff g_i \neq 0$.
- Si K est réel clos,

$$g_i \in P_{2n+1}^\times \iff g_i \neq 0,$$

$$g_i \in P_{2n}^\times \iff g_i > 0.$$

Théorème (Chevalley (19 ? ?), Tarski (1948), Macintyre (1976))

Si K est algébriquement clos, réel clos ou p-adiquement clos, alors la projection sur K^m de tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^{m+n}$ est encore semi-algébrique.

Théorème (Chevalley (19 ? ?), Tarski (1948), Macintyre (1976))

Si K est algébriquement clos, réel clos ou p-adiquement clos, alors la projection sur K^m de tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^{m+n}$ est encore semi-algébrique.

Autrement dit, pour les corps K de ce type :

- En partant des ensembles algébriques (définis par $f = 0$ avec f pol.) et en stabilisant par combinaisons booléennes et projections, on obtient *exactement* les ensembles semi-algébriques.
- $A \subseteq K^m$ est semi-algébrique $\iff$ A est définissable (dans le langage des anneaux).

1 Introduction

- Corps p-adiquement clos
- Ensembles semi-algébriques
- Élimination des quantificateurs
- Quelle triangulation ?
- Une triangulation pour quoi faire ?

Une **application** $\varphi : A \subseteq K^m \to K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Une **application** $\varphi : A \subseteq K^m \to K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Théorème (Triangulation des ensembles semi-algébriques réels)

Soit K un corps réel clos. Tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à la réunion d'un complexe simplicial.

Une **application** $\varphi : A \subseteq K^m \to K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Théorème (Triangulation des ensembles semi-algébriques réels)

Soit K un corps réel clos. Tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à la réunion d'un complexe simplicial.

Objectif

Obtenir le même résultat pour un corps p-adiquement clos.

Une **application** $\varphi : A \subseteq K^m \to K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Théorème (Triangulation des ensembles semi-algébriques réels)

Soit K un corps réel clos. Tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à la réunion d'un complexe simplicial.

Objectif

Obtenir le même résultat pour un corps p-adiquement clos.

Ingrédients

- Décomposition cellulaire.

Une **application** $\varphi : A \subseteq K^m \to K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Théorème (Triangulation des ensembles semi-algébriques réels)

Soit K un corps réel clos. Tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à la réunion d'un complexe simplicial.

Objectif

Obtenir le même résultat pour un corps p-adiquement clos.

Ingrédients

- Décomposition cellulaire.
- Lemme de « bonne direction ».

Une **application** $\varphi : A \subseteq K^m \to K^n$ est **semi-algébrique** si son graphe est semi-algébrique.

Théorème (Triangulation des ensembles semi-algébriques réels)

Soit K un corps réel clos. Tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à la réunion d'un complexe simplicial.

Objectif

Obtenir le même résultat pour un corps p-adiquement clos.

Ingrédients

- Décomposition cellulaire.
- Lemme de « bonne direction ».
- Simplexes (faces, découpage...).

Classifier les ensembles s.a. p-adique à homéomorphismes s.a. près ?

Il faudrait déja classer les simplexes p-adiques à homéomorphismes s.a. près.

Classifier les ensembles s.a. p-adique à homéomorphismes s.a. près ?

Il faudrait déja classer les simplexes p-adiques à homéomorphismes s.a. près.

Théorème

Le nombre $\alpha(K)$ de classes d'ensembles semi-algébriques à homéomorphismes semi-algébriques près est $\leqslant \mathrm{Card}\, v(K^\times)$.

Conjecture : $\alpha(K) = \aleph_0$.

Analogue p-adique du théorème de Hardt ?

Le fait que le théorème de triangulation p-adique soit démontré sur les corps p-adiquement clos donne (par la théorie des modèles) des résultats d'uniformité.

Analogue p-adique du théorème de Hardt ?

Le fait que le théorème de triangulation p-adique soit démontré sur les corps p-adiquement clos donne (par la théorie des modèles) des résultats d'uniformité.

Mais... il reste le même problème de classifier les simplexes p-adiques à homéomorphisme près.

Rétractions/prolongements ?

Une **rétraction** de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \to B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB_1 : Une telle rétraction existe $\Rightarrow$ B est fermé dans A.

Rétractions/prolongements ?

Une **rétraction** de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \to B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB_1 : Une telle rétraction existe $\Rightarrow$ B est fermé dans A.

NB_2 : Dans le cas réel, obstructions contrôlées par l'*homotopie*.

Rétractions/prolongements ?

Une **rétraction** de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \to B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB_1 : Une telle rétraction existe $\Rightarrow$ B est fermé dans A.

NB_2 : Dans le cas réel, obstructions contrôlées par l'*homotopie*.

Soit R la boule unité de K (*i.e.* l'anneau de la valuation). Soit $X \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique non vide, et soit $a \in X$.
Pour tout « *lacet* » (application continue $\gamma : R \to X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$) l'application $\Phi : X \times R \to X$ définie par

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } v(t) = 0 \\ a & \text{si } v(t) \geqslant 1 \end{cases}$$

déforme continûment γ en un point : X est « *contractile* ».

Rétractions/prolongements ?

Une **rétraction** de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \to B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB_1 : Une telle rétraction existe $\Rightarrow B$ est fermé dans A.

NB_2 : Dans le cas réel, obstructions contrôlées par l'*homotopie*.

Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \Leftrightarrow B$ est fermé dans A.

Rétractions/prolongements ?

Une **rétraction** de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \to B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB_1 : Une telle rétraction existe $\Rightarrow$ B est fermé dans A.

NB_2 : Dans le cas réel, obstructions contrôlées par l'*homotopie*.

Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur B $\Leftrightarrow$ B est fermé dans A.

Corollaire (Prolongement « à la Tietze-Urysohn »)

Soit $A \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique. Toute fonction semi-algébrique $f : B \to K$ continue sur une partie B fermée dans A se prolonge en une fonction semi-algébrique continue $\widetilde{f} : A \to K$ telle que $f(A) = f(B)$.

Théorie (ensembliste) de l'intersection ?

Soit X une partie semi-algébrique de K^m. Soit $L(X)$:= le treillis des ensembles semi-algébriques *fermés dans X*.

Théorème (Grzegorczyk 1951)

Si K est algébriquement clos ou réel clos et si $\dim X \geqslant 2$ *alors la théorie de $L(X)$ est indécidable.*

NB : L'existence de composantes irréductibles ou de composantes connexes joue un rôle crucial dans la preuve.

Théorie (ensembliste) de l'intersection ?

Soit X une partie semi-algébrique de K^m. Soit $L(X)$:= le treillis des ensembles semi-algébriques *fermés dans X*.

Théorème (Grzegorczyk 1951)

Si K est algébriquement clos ou réel clos et si $\dim X \geqslant 2$ alors la théorie de $L(X)$ est indécidable.

NB : L'existence de composantes irréductibles ou de composantes connexes joue un rôle crucial dans la preuve.

Théorème (Théorie de l'intersection)

Si K est p-adiquement clos alors la théorie de $L(X)$ est décidable (et modèle-complète, et élimine les quanteurs dans un certain langage, etc).

L'axiomatisaton des treillis $L(X)$ a conduit à conjecturer le résultat suivant, qui à la fois se déduit et joue un rôle clé dans la preuve de la triangulation.

Théorème (Découpage)

Soit $A \subseteq K^m$ une partie semi-algébrique relativement ouverte sans point isolé. Soient $X_1, \ldots, X_r$ des fermés semi-algébriques tels que $X_1 \cup \cdots \cup X_r = \partial A$.
Il existe une partition de A en parties semi-algébriques $A_1, \ldots, A_r$ tels que $\partial A_k = X_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.

Soit X un espace topologique, et $\mathcal{A}$ une famille *finie* de parties de X. $\mathcal{A}$ est **complexe** de parties de X si :

1. les éléments de $\mathcal{A}$ sont deux-à-deux disjoints ;

37 %

Soit X un espace topologique, et $\mathcal{A}$ une famille *finie* de parties de X. $\mathcal{A}$ est **complexe** de parties de X si :

1. les éléments de $\mathcal{A}$ sont deux-à-deux disjoints ;
2. tout $A \in \mathcal{A}$ est relativement ouvert (*i.e.* $\overline{A} \setminus A$ est fermé) et

$$\overline{A} = \bigcup \{B \in \mathcal{A} \,/\, B \leqslant A\}.$$

Ici $B \leqslant A$ pour **l'ordre de spécialisation**, défini par

$$B \leqslant A \iff B \subseteq \overline{A}.$$

Soit X un espace topologique, et $\mathcal{A}$ une famille *finie* de parties de X. $\mathcal{A}$ est **complexe** de parties de X si :

1. les éléments de $\mathcal{A}$ sont deux-à-deux disjoints ;
2. tout $A \in \mathcal{A}$ est relativement ouvert (*i.e.* $\overline{A} \setminus A$ est fermé) et

$$\overline{A} = \bigcup \{B \in \mathcal{A} \,/\, B \leqslant A\}.$$

Ici $B \leqslant A$ pour **l'ordre de spécialisation**, défini par

$$B \leqslant A \iff B \subseteq \overline{A}.$$

C'est un **complexe simplicial** si les $A \in \mathcal{A}$ sont des « simplexes ».

2 Complexes simpliciaux

Un **polytope réel** A est l'enveloppe convexe *stricte* d'une partie finie $A_0 \subseteq \mathbb{R}^q$ (points de la frontière ∂A exclus).

C'est un **simplexe** si on peut prendre pour A_0 un ensemble de points affinement indépendants.

Un **polytope réel** A est l'enveloppe convexe *stricte* d'une partie finie $A_0 \subseteq \mathbb{R}^q$ (points de la frontière ∂A exclus).

C'est un **simplexe** si on peut prendre pour A_0 un ensemble de points affinement indépendants.

Propriétés

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^q$ un polytope réel.

1. *A est relativement ouvert et précompact.*
2. *A peut être défini par un nombre fini d'inégalités linéaires.*
3. *Les faces de A sont des polytopes.*
4. *Les faces de A forment un complexe et une partition de $\overline{A}$.*

Un **polytope réel** A est l'enveloppe convexe *stricte* d'une partie finie $A_0 \subseteq \mathbb{R}^q$ (points de la frontière ∂A exclus).

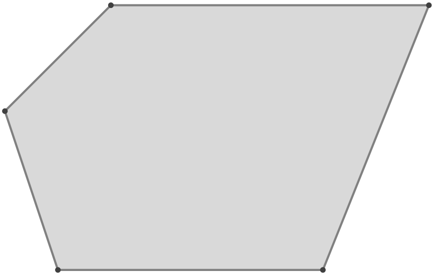
C'est un **simplexe** si on peut prendre pour A_0 un ensemble de points affinement indépendants.

Les **facettes** d'un polytope sont ses faces propres maximales (pour l'ordre de spécialisation).

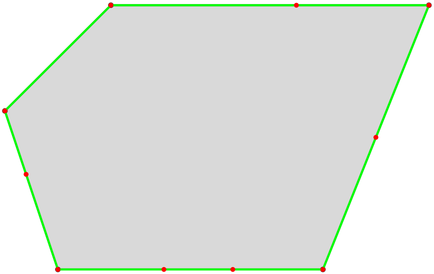
Théorème

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^q$ un polytope réel de dimension d.

1. *A possède au moins $d + 1$ facettes.*
2. *Il en a exactement $d + 1$ $\iff$ c'est un simplexe.*

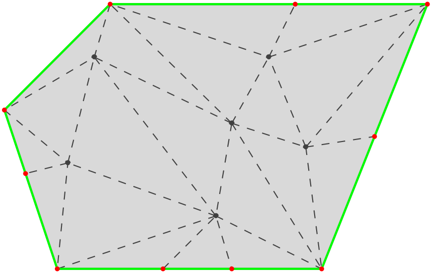


Les faces propres de A forment un complexe.



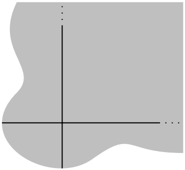
Tout complexe simplicial
qui raffine le complexe des faces propres de A

43 %



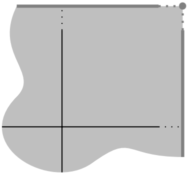
Tout complexe simplicial
qui raffine le complexe des faces propres de A
peut s'étendre par "Découpage Barycentrique"
en un complexe simplicial qui partitionne $\overline{A}$.

Pour cet exposé on prend $\mathscr{Z} = \mathbb{Z}$, mais tout $\mathbb{Z}$-groupe conviendrait.
On pose $\Gamma := \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.



Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

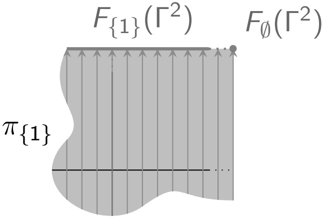
Pour cet exposé on prend $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, mais tout $\mathbb{Z}$-groupe conviendrait.
On pose $\Gamma := \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.



Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\operatorname{Supp} a := \left\{ i \in \{1, \ldots, q\} \ / \ a_i < +\infty \right\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q \ / \ \operatorname{Supp} a = I\}$.

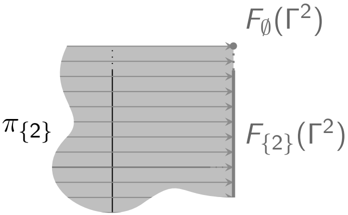
Pour cet exposé on prend $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, mais tout $\mathbb{Z}$-groupe conviendrait.
On pose $\Gamma := \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.



Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\operatorname{Supp} a := \{i \in \{1, \ldots, q\} \,/\, a_i < +\infty\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q \,/\, \operatorname{Supp} a = I\}$.
- $\pi_I :=$ la projection de Γ^q sur $\{a \in \Gamma^q \,/\, \operatorname{Supp} a \subseteq I\}$.

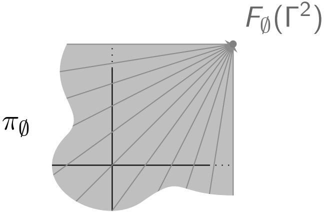
Pour cet exposé on prend $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, mais tout $\mathbb{Z}$-groupe conviendrait.
On pose $\Gamma := \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.



Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, Supp $a := \big\{ i \in \{1, \ldots, q\} \;/\; a_i < +\infty \big\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{ a \in \Gamma^q \;/\; \operatorname{Supp} a = I \}$.
- $\pi_I :=$ la projection de Γ^q sur $\{ a \in \Gamma^q \;/\; \operatorname{Supp} a \subseteq I \}$.

Pour cet exposé on prend $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, mais tout $\mathbb{Z}$-groupe conviendrait.
On pose $\Gamma := \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.



Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\operatorname{Supp} a := \big\{ i \in \{1, \ldots, q\} \;/\; a_i < +\infty \big\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{ a \in \Gamma^q \;/\; \operatorname{Supp} a = I \}$.
- $\pi_I :=$ la projection de Γ^q sur $\{ a \in \Gamma^q \;/\; \operatorname{Supp} a \subseteq I \}$.

- Pour tous $a, b \in \Gamma^q$, $\delta(a,b) := \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |2^{-a_i} - 2^{-b_i}|$.

NB_1 : Toute partie de Γ^q bornée inférieurement est précompacte.

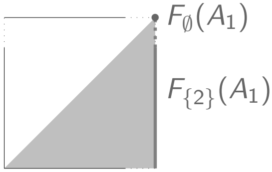
- Pour tous $a, b \in \Gamma^q$, $\delta(a,b) := \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |2^{-a_i} - 2^{-b_i}|$.

NB$_1$: Toute partie de Γ^q bornée inférieurement est précompacte.

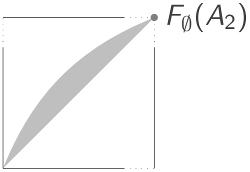
- Pour tout $A \subseteq \Gamma^q$ et tout $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$:

$$F_I(A) := \left\{a \in \overline{A} \,/\, \operatorname{Supp} a = I\right\} = \overline{A} \cap F_I(\Gamma^q).$$

S'il est non vide, $F_I(A)$ est appelé **face** de A de support I.



$A_1 \;:\; 0 \leqslant y \leqslant x$



$A_2 \;:\; 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x$

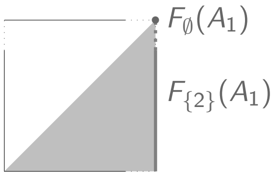
- Pour tous $a, b \in \Gamma^q$, $\delta(a,b) := \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |2^{-a_i} - 2^{-b_i}|$.

NB$_1$: Toute partie de Γ^q bornée inférieurement est précompacte.

- Pour tout $A \subseteq \Gamma^q$ et tout $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$:

$$F_I(A) := \left\{a \in \overline{A} \,/\, \operatorname{Supp} a = I\right\} = \overline{A} \cap F_I(\Gamma^q).$$

S'il est non vide, $F_I(A)$ est appelé **face** de A de support I.



A_1 : $0 \leqslant y \leqslant x$ $\qquad$ A_2 : $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x$

NB$_2$: Les faces de $A \subseteq \mathbb{Z}^3$ ne forment pas toujours un complexe !

50 %

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est **semi-affine mod N** s'il est défini par

$$f_1(x) \geqslant 0 \text{ et } \cdots \text{ et } f_r(x) \geqslant 0 \text{ et } g_1(x) \in N\mathbb{Z} \text{ et } g_s(x) \in N\mathbb{Z}$$

avec f_i, g_j des applications $\mathbb{Z}$-affines.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est **semi-affine mod N** s'il est défini par

$$f_1(x) \geqslant 0 \text{ et } \cdots \text{ et } f_r(x) \geqslant 0 \text{ et } g_1(x) \in N\mathbb{Z} \text{ et } g_s(x) \in N\mathbb{Z}$$

avec f_i, g_j des applications $\mathbb{Z}$-affines.

A est **semi-affine** si $N = 1$ (congruences triviales).

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est **semi-affine mod N** s'il est défini par

$$f_1(x) \geqslant 0 \text{ et } \cdots \text{ et } f_r(x) \geqslant 0 \text{ et } g_1(x) \in N\mathbb{Z} \text{ et } g_s(x) \in N\mathbb{Z}$$

avec f_i, g_j des applications $\mathbb{Z}$-affines.

A est **semi-affine** si $N = 1$ (congruences triviales).

Mêmes définitions pour $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, après identification $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\, I}$.

52 %

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est **semi-affine mod N** s'il est défini par

$$f_1(x) \geqslant 0 \text{ et } \cdots \text{ et } f_r(x) \geqslant 0 \text{ et } g_1(x) \in N\mathbb{Z} \text{ et } g_s(x) \in N\mathbb{Z}$$

avec f_i, g_j des applications $\mathbb{Z}$-affines.

A est **semi-affine** si $N = 1$ (congruences triviales).

Mêmes définitions pour $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, après identification $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\, I}$.

Exemple

Les conditions suivantes :

$$0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x \quad \text{et} \quad z = 2x - 2y.$$

définissent une partie semi-affine A de $\mathbb{Z}^3$.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est **semi-affine mod N** s'il est défini par

$$f_1(x) \geqslant 0 \text{ et } \cdots \text{ et } f_r(x) \geqslant 0 \text{ et } g_1(x) \in N\mathbb{Z} \text{ et } g_s(x) \in N\mathbb{Z}$$

avec f_i, g_j des applications $\mathbb{Z}$-affines.

A est **semi-affine** si $N = 1$ (congruences triviales).

Mêmes définitions pour $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, après identification $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\, I}$.

Exemple

Les conditions suivantes :

$$0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x \quad \text{et} \quad z = 2x - 2y.$$

définissent une partie semi-affine A de $\mathbb{Z}^3$.

Néanmoins $F_{\{3\}}(A) = \{+\infty\} \times \{+\infty\} \times 2\mathbb{N}$ n'est que semi-affine *mod 2*.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ *une partie semi-affine mod* N. *Soient* $I, J \subseteq \{1, \ldots, q\}$ *tels que* $F_I(A)$ *et* $F_J(A)$ *sont non vides.*

1. $F_I(A) = \pi_I(A)$ *est le projeté de* A *sur* $F_I(\Gamma^q)$.
2. $F_J(A) \leqslant F_I(A) \iff J \subseteq I$. *Dans ce cas* $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
3. $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$.

L'ensemble des faces propres de A *forme donc un demi-treillis inférieur distributif et un complexe qui partitionne* ∂A.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ une partie semi-affine mod N. Soient $I, J \subseteq \{1, \ldots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides.

1. $F_I(A) = \pi_I(A)$ *est le projeté de A sur* $F_I(\Gamma^q)$.
2. $F_J(A) \leqslant F_I(A) \iff J \subseteq I$. *Dans ce cas* $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
3. $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$.

L'ensemble des faces propres de A forme donc un demi-treillis inférieur distributif et un complexe qui partitionne ∂A.

Problèmes

- Les faces d'une partie semi-affine (mod N) *ne sont pas* semi-affines (mod N') en général.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ une partie semi-affine mod N. Soient $I, J \subseteq \{1, \ldots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides.

1. $F_I(A) = \pi_I(A)$ *est le projeté de* A *sur* $F_I(\Gamma^q)$.
2. $F_J(A) \leqslant F_I(A) \iff J \subseteq I$. *Dans ce cas* $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
3. $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$.

L'ensemble des faces propres de A forme donc un demi-treillis inférieur distributif et un complexe qui partitionne ∂A.

Problèmes

- Les faces d'une partie semi-affine (mod N) *ne sont pas* semi-affines (mod N') en général. Ce sont juste des parties **de Presburger** (= *unions finies* de semi-affines mod N').

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ une partie semi-affine mod N. Soient $I, J \subseteq \{1, \dots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides.

1. $F_I(A) = \pi_I(A)$ *est le projeté de A sur $F_I(\Gamma^q)$.*
2. $F_J(A) \leqslant F_I(A) \iff J \subseteq I$. *Dans ce cas* $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
3. $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$.

L'ensemble des faces propres de A forme donc un demi-treillis inférieur distributif et un complexe qui partitionne ∂A.

Problèmes

- Les faces d'une partie semi-affine (mod N) *ne sont pas* semi-affines (mod N') en général. Ce sont juste des parties **de Presburger** (= *unions finies* de semi-affines mod N').
- Si $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est seulement de Presburger, la proposition devient fausse.

La distance $\delta : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ se prolonge sur $\Omega := \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$.

$f : X \subseteq \Gamma^q \to \Omega$ est **largement continue** si elle se prolonge en une fonction continue sur $\overline{X}$.

La distance $\delta : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ se prolonge sur $\Omega := \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$.

$f : X \subseteq \Gamma^q \to \Omega$ est **largement continue** si elle se prolonge en une fonction continue sur $\overline{X}$.

Example

Sur $X = \mathbb{Z}^2$ la fonction $f(x, y) = x - y$ est continue mais pas largement continue : elle n'a pas de limite en $(+\infty, +\infty)$.

Le **socle** de $A \subseteq \Gamma^{q+1}$ est son projeté $\widehat{A}$ sur Γ^q.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est un **polytope discret** si $A = \mathbb{Z}^0$ ou $q \geqslant 1$ et $\widehat{A}$ est un polytope discret de $\mathbb{Z}^{q-1}$ et

$$(x, t) \in A \iff x \in \widehat{A} \text{ et } \mu(x) \leqslant t \leqslant \nu(x),$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \to \Omega$ sont $\mathbb{Q}$-affines (ou $+\infty$), *largement continues* et *positive*. Un tel couple (μ, ν) s'appelle une **présentation** de A.

Le **socle** de $A \subseteq \Gamma^{q+1}$ est son projeté $\widehat{A}$ sur Γ^q.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est un **polytope discret** si $A = \mathbb{Z}^0$ ou $q \geqslant 1$ et $\widehat{A}$ est un polytope discret de $\mathbb{Z}^{q-1}$ et

$$(x, t) \in A \iff x \in \widehat{A} \ \text{ et } \ \mu(x) \leqslant t \leqslant \nu(x),$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \to \Omega$ sont $\mathbb{Q}$-affines (ou $+\infty$), *largement continues* et *positive*. Un tel couple (μ, ν) s'appelle une **présentation** de A.

Ceci se generalise à $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, en identifiant $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\, I}$.

Le **socle** de $A \subseteq \Gamma^{q+1}$ est son projeté $\widehat{A}$ sur Γ^q.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est un **polytope discret** si $A = \mathbb{Z}^0$ ou $q \geqslant 1$ et $\widehat{A}$ est un polytope discret de $\mathbb{Z}^{q-1}$ et

$$(x,t) \in A \iff x \in \widehat{A} \text{ et } \mu(x) \leqslant t \leqslant \nu(x),$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \to \Omega$ sont $\mathbb{Q}$-affines (ou $+\infty$), *largement continues* et *positive*. Un tel couple (μ, ν) s'appelle une **présentation** de A.

Ceci se generalise à $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, en identifiant $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\, I}$.

NB : Tout polytope discret est précompact et semi-affine.

Le **socle** de $A \subseteq \Gamma^{q+1}$ est son projeté $\widehat{A}$ sur Γ^q.

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est un **polytope discret** si $A = \mathbb{Z}^0$ ou $q \geqslant 1$ et $\widehat{A}$ est un polytope discret de $\mathbb{Z}^{q-1}$ et

$$(x,t) \in A \iff x \in \widehat{A} \text{ et } \mu(x) \leqslant t \leqslant \nu(x),$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \to \Omega$ sont $\mathbb{Q}$-affines (ou $+\infty$), *largement continues* et *positive*. Un tel couple (μ, ν) s'appelle une **présentation** de A.

Ceci se generalise à $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, en identifiant $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\, I}$.

NB : Tout polytope discret est précompact et semi-affine.
En particulier les faces de A forment un complexe, et pour toute face $B = F_J(A)$ on a $B = \pi_J(A)$.
On notera alors $\pi_B := \pi_J$ la **projection de A sur B**.

Proposition

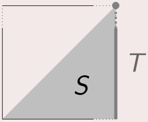
Soit $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$ *un polytope et* $B = F_J(A)$ *une face de* A*.*

1. *Si* $q \geqslant 1$ *alors* $\widehat{B} = F_{\widehat{J}}(\widehat{A})$ *avec* $\widehat{J} := J \setminus \{q\}$*.*
2. *Soit* (μ, ν) *une présentation de* A*. Alors* $(x, t) \in F_J(\Gamma^q)$ *appartient à* B *ssi :*
$$x \in \widehat{B} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}(x) \leqslant t \leqslant \bar{\nu}(x).$$

Pour en conclure que B est un polytope, de présentation $(\bar{\mu}, \bar{\nu})_{|\widehat{B}}$, il reste à s'assurer que $(\bar{\mu}, \bar{\nu})_{|\widehat{B}}$ sont encore $\mathbb{Q}$-affines (ou $+\infty$).

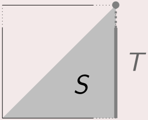
Proposition (Dichotomie)

Soit $S \subseteq F_I(\Gamma^q)$ une partie semi-affine mod N. Soit T une face propre de S, et soit $f : S \cup T \to \Gamma$ une fonction continue sur $S \cup T$ et $\mathbb{Q}$-affine sur S.



Proposition (Dichotomie)

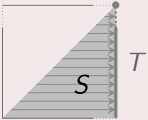
Soit $S \subseteq F_I(\Gamma^q)$ une partie semi-affine mod N. Soit T une face propre de S, et soit $f : S \cup T \to \Gamma$ une fonction continue sur $S \cup T$ et $\mathbb{Q}$-affine sur S.



- *Si $f(t) = +\infty$ en un point $t \in T$ alors $f_{|T} = +\infty$.*

Proposition (Dichotomie)

Soit $S \subseteq F_I(\Gamma^q)$ une partie semi-affine mod N. Soit T une face propre de S, et soit $f : S \cup T \to \Gamma$ une fonction continue sur $S \cup T$ et $\mathbb{Q}$-affine sur S.



- *Si $f(t) = +\infty$ en un point $t \in T$ alors $f_{|T} = +\infty$.*
- *Sinon, $f_{|T}$ est $\mathbb{Q}$-affine et $f_{|S} = f_{|T} \circ \pi_T$.*

En particulier, vu ce qui précède : toute face d'un polytope discret est un polytope discret.

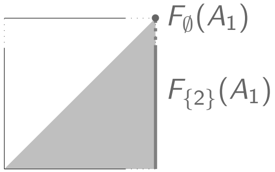
Rappel

Les simplexes réels sont, parmi les polytopes de dimension $d \geqslant 1$ donnée, ceux dont le nombre de facettes est minimal $(= d + 1)$.

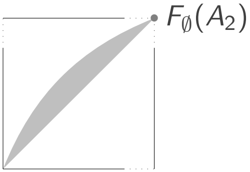
Rappel

Les simplexes réels sont, parmi les polytopes de dimension $d \geqslant 1$ donnée, ceux dont le nombre de facettes est minimal ($= d+1$).

Un polytope discret est un **simplexe** s'il possède *au plus une* facette, qui est elle-même un simplexe. Autrement dit c'est un simplexe ssi ses faces forment une *chaîne*.



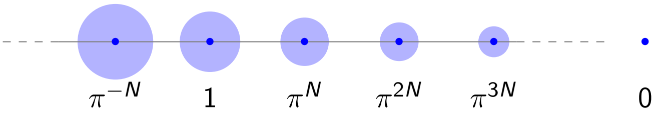
$A_1 \ : \ 0 \leqslant y \leqslant x$



$A_2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x$

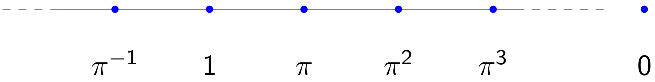
On fixe désormais un corps p-adiquement clos K.
Pour simplifier on suppose $v(K) = \Gamma = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

- R := l'anneau de la valuation p-adique.
- π := un générateur de l'idéal maximal de R.
- Pour tout $x \in K^q$, $\|x\| := \max_{1 \leqslant i \leqslant q} 2^{-v(x_i)}$.
- $B(x, r) := \{y \in K^q \ / \ \|x - y\| \leqslant \|r\|\}$.
- $Q_{N,M} := \bigcup_{k\in\Gamma} \pi^{Nk}(1 + \pi^M R) = \bigcup_{k\in\Gamma} B(\pi^{Nk}, \pi^{Nk+M})$.

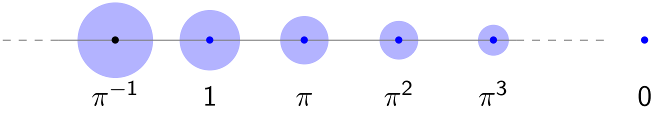


70 %

$\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas* semi-algébrique.



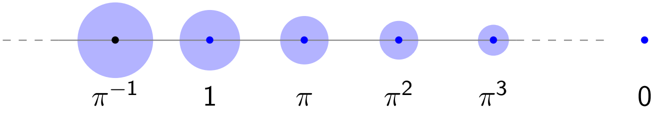
$\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas* semi-algébrique. $Q^{\times}_{1,M}$ est un voisinage semi-algébrique de $\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est d'autant plus fin que M est plus grand.



72 %

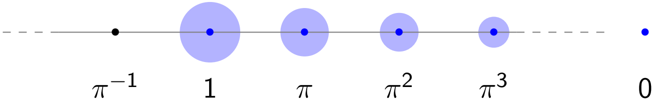
$\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas* semi-algébrique. $Q^\times_{1,M}$ est un voisinage semi-algébrique de $\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est d'autant plus fin que M est plus grand.

NB : $Q^\times_{1,M}$ est aussi un sous-groupe de $K^\times$ d'indice fini, donc ouvert-fermé dans $K^\times$.



$\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas* semi-algébrique. $Q^\times_{1,M}$ est un voisinage semi-algébrique de $\{\pi^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est d'autant plus fin que M est plus grand.

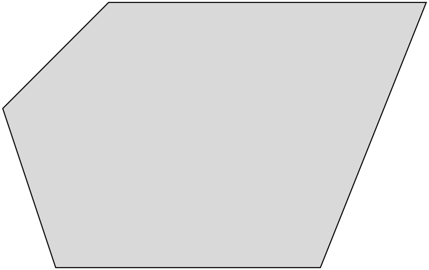
NB : $Q^\times_{1,M}$ est aussi un sous-groupe de $K^\times$ d'indice fini, donc ouvert-fermé dans $K^\times$.



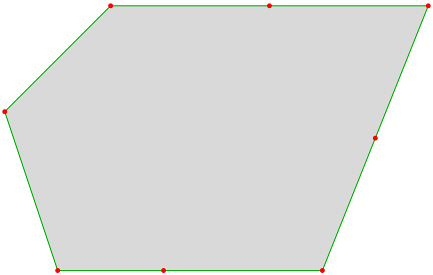
$D^M R := Q_{1,M} \cap R$.

Un **polytope p-adique** est la pré-image, par la valuation p-adique restreinte à $D^M R^q$, d'un polytope discret (dans Γ^q). *Idem* pour les **simplexes p-adiques**.

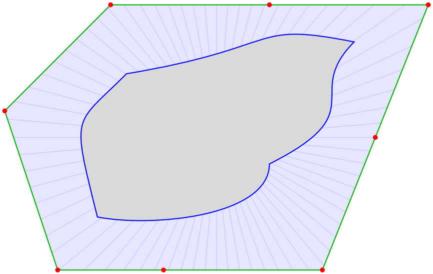
NB : Les polytopes p-adiques héritent des polytopes discrets toutes leurs bonnes propriétés : faces, projections, présentation, et...



$A =$ un polytope.



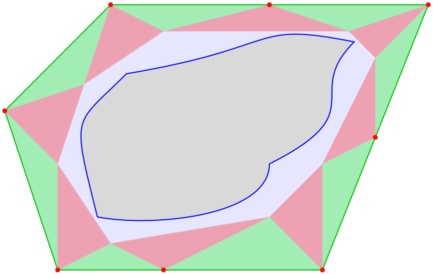
$\mathcal{T}$ = un complexe simplicial
qui raffine le complexe des faces propres de A.



$\varepsilon : \partial A \to K^{\times}$ contrôle la distance au bord :

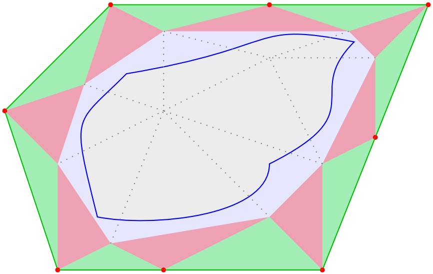
$$\forall T \in \mathcal{T},\quad V_T(\varepsilon) := \left\{ a \in A \,/\, \|a - \pi_T(a)\| \leqslant \|\varepsilon(\pi_T(a))\| \right\}$$

est un ≪ voisinage de T dans A ≫.



$T \in \mathcal{T}$ peut être « étendu » *dans* $V_T(\varepsilon)$ en un simplexe S_T de facette T.

76 %



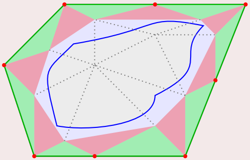
Ce qui reste de A se découpe en simplexes (sans bord !).

Proposition (Découpage monotopique sous contrainte)

Soit $A \subseteq D^M R^q$ un polytope et $\mathcal{T}$ un complexe simplicial qui raffine le complexe des faces propres de A. Soit $\varepsilon : \partial A \to K^\times$ une fonction semi-algébrique.

Il existe un complexe simplicial $\mathcal{S}$ dans $D^M R^q$ tel que :

1. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ et $\bigcup \mathcal{S} = \overline{A}$;
2. $\forall T \in \mathcal{T}$, *il existe un unique* $S_T \in \mathcal{S}$ *de facette* T ;
3. $\forall a \in S_T$, $\delta(a, \pi_T(a)) \leqslant 2^{-\varepsilon(\pi_T(a))}$;
4. *les autres* $S \in \mathcal{S}$ *sont ouvert-fermés.*



3. Résultat principal et applications
   - Triangulation et monomialisation
   - Applications

Un **complexe simplicial d'indice M** est une famille finie $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de complexes simpliciaux $\mathcal{T}_i$ de $D^M R^{q_i}$.

Un **complexe simplicial d'indice M** est une famille finie $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de complexes simpliciaux $\mathcal{T}_i$ de $D^M R^{q_i}$.

Théorème (Triangulation des ensembles)

Pour toute partie semi-algébrique $A \subseteq K^m$, il existe un complexe simplicial $\mathcal{T}$ d'indice M et un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi : \biguplus \mathcal{T} \to A$.
De plus M peut être choisi arbitrairement grand.

Ici $\biguplus \mathcal{T}$ désigne la réunion disjointe des $\bigcup \mathcal{T}_i$.

NB : On peut trianguler simultanément toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ de parties semi-algébriques. On appelle $(\mathcal{T}, \varphi)$ une **triangulation** de $(A_i)_{i \in I}$ (d'indice M).

Théorème (Triangulation/monomialisation des fonctions)

Soit $(\theta_i : A_i \subseteq K^m \to K)_{i\in I}$ *une famille finie de fonctions semi-algébriques et* n, N *des entiers positifs. Il existe une triangulation* $(\mathcal{T}, \varphi)$ *de* $(A_i)_{i\in I}$*, semi-algébrique et d'indice* M*, telle que chaque* $\theta_i \circ \varphi_{|T}$ *est* N*-monomiale mod* $U_{e,n}$ *(pour tout* $i \in I$ *et* $T \in \mathcal{T}$ *tels que* $\varphi(T) \subseteq A_i$*).*
De plus e, M *peuvent être pris arbitrairement grands.*

Théorème (Triangulation/monomialisation des fonctions)

Soit $(\theta_i : A_i \subseteq K^m \to K)_{i\in I}$ une famille finie de fonctions semi-algébriques et n, N des entiers positifs. Il existe une triangulation $(\mathcal{T}, \varphi)$ de $(A_i)_{i\in I}$, semi-algébrique et d'indice M, telle que chaque $\theta_i \circ \varphi_{|T}$ est N-monomiale mod $U_{e,n}$ (pour tout $i \in I$ et $T \in \mathcal{T}$ tels que $\varphi(T) \subseteq A_i$).
De plus e, M peuvent être pris arbitrairement grands.

- $U_e := \{x \in K \ / \ x^e = 1\}$.
- $U_{e,n} := U_e \cdot (1 + \pi^n R) = \displaystyle\bigcup_{x \in U_e} B(x, \pi^n)$

NB : $U_{e,n}$ est un sous-groupe de $K^\times$ et un voisinage de U_e.

- $U_e := \{x \in K \ / \ x^e = 1\}$.
- $U_{e,n} := U_e \cdot (1 + \pi^n R) = \bigcup_{x \in U_e} B(x, \pi^n)$

NB : $U_{e,n}$ est un sous-groupe de $K^\times$ et un voisinage de U_e.

f est **N-monomiale mod $U_{e,n}$** sur le domaine $S \subseteq K^q$ s'il existe $u : S \to U_{e,n}$ semi-algébrique, $\xi \in K$ et $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\forall x \in S, \quad f(x) = u(x) \cdot \xi \cdot \prod_{i=1}^{q} x_i^{N\beta_i}$$

- $U_e := \{x \in K \ / \ x^e = 1\}$.
- $U_{e,n} := U_e \cdot (1 + \pi^n R) = \bigcup_{x \in U_e} B(x, \pi^n)$

NB : $U_{e,n}$ est un sous-groupe de $K^\times$ et un voisinage de U_e.

f est **N-monomiale mod $U_{e,n}$** sur le domaine $S \subseteq K^q$ s'il existe $u : S \to U_{e,n}$ semi-algébrique, $\xi \in K$ et $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\forall x \in S, \quad f(x) = u(x) \cdot \underbrace{\xi \cdot \prod_{i=1}^{q} x_i^{N\beta_i}}_{g(x)}$$

De manière équivalente, il existe $\chi : S \to U_e$ semi-algébrique et $g : S \to K$ N-monomiale telles que

$$\left\| \frac{f}{\chi g} - 1 \right\| \leqslant \|\pi^n\|.$$

Théorème (Triangulation/monomialisation des fonctions)

Soit $(\theta_i : A_i \subseteq K^m \to K)_{i \in I}$ une famille finie de fonctions semi-algébriques et n, N des entiers positifs. Il existe une triangulation $(\mathcal{T}, \varphi)$ de $(A_i)_{i \in I}$, semi-algébrique et d'indice M, telle que chaque $\theta_i \circ \varphi_{|T}$ est N-monomiale mod $U_{e,n}$ (pour tout $i \in I$ et $T \in \mathcal{T}$ tels que $\varphi(T) \subseteq A_i$).
De plus e, M peuvent être pris arbitrairement grands.

Notons $\mathbf{T}_m$ cet énoncé.

3 Résultat principal et applications

- Triangulation et monomialisation
- Applications

Théorème (Rétractions)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur B $\iff$ B est fermé dans A.

Preuve (esquisse)

$\mathbf{T}_m$ ramène au cas où $A = \overline{S}$ et $B = \overline{T}$ avec S un simplexe et T une face de S. Il suffit alors de prendre $\rho = \pi_T$.

Théorème (Découpage)

Soit $A \subseteq K^m$ une partie semi-algébrique relativement ouverte sans point isolé. Soient $X_1, \ldots, X_r$ des fermés semi-algébriques tels que $X_1 \cup \cdots \cup X_r = \partial A$.
Il existe une partition de A en morceaux semi-algébriques $A_1, \ldots, A_r$ tels que $\partial A_k = X_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.

Preuve (esquisse)

$\mathbf{T}_m$ ramène au cas où A est un simplexe de $D^M R^q$. Pour simplifier supposons que $r = 2$ et $X_1 = X_2 = \overline{B}$ est la facette de A.

Soit $i \in \operatorname{Supp} A \setminus \operatorname{Supp} B$. On pose :

$$A_1 = \left\{ a \in A \,/\, v(a_i) \in 2\mathbb{N} \right\} \qquad A_2 = A \setminus A_1.$$

Théorème (Relèvement)

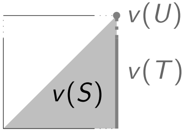
Soit $\eta : A \subseteq K^m \to K$ une fonction semi-algébrique telle que $\|\eta\|$ est continue. Il existe une fonction semi-algébrique continue $h : A \subseteq K^m \to K$ telle que $\|h\| = \|\eta\|$.

Preuve (esquisse)

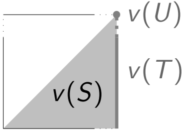
$\mathbf{T}_m$ ramène au cas suivant :

- $A = \overline{S}$ avec S un simplexe de $D^M R^q$;
- $\eta : \overline{S} \to K$ est N-monomiale mod $U_{e,n}$ sur chaque face de S.

Alors $v \circ \eta$ définit une application $\mathbb{Z}$-affine sur chaque face de $v(S)$.



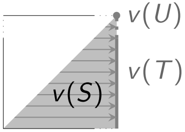
- $\eta(x,y) = u_S(x,t) \cdot \xi_S \cdot x^{\alpha_S} y^{\beta_S}$ sur S ;
- $\eta(0,y) = u_T(0,y) \cdot \xi_T \cdot y^{\beta_T}$ sur T ;
- $\eta(0,0) = 0$ sur U.



- $\eta(x,y) = u_S(x,t) \cdot \xi_S \cdot x^{\alpha_S} y^{\beta_S}$ sur S ;
- $\eta(0,y) = u_T(0,y) \cdot \xi_T \cdot y^{\beta_T}$ sur T ;
- $\eta(0,0) = 0$ sur U.

On a donc $v(\eta(x,y)) = \eta^*(v(x), v(y))$ avec $\eta^* : v(\overline{S}) \to \mathbb{Z}$ définie par :

- $\eta^*(x', y') = v(\xi_S) + \alpha_S x' + \beta_S y'$ sur $v(S)$;
- $\eta^*(+\infty, y') = v(\xi_T) + \beta_T y'$ sur $v(T)$.
- $\eta^*(+\infty, +\infty) = +\infty$ sur $v(U)$.

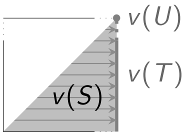


- $\eta(x,y) = u_S(x,t)\cdot\xi_S\cdot x^{\alpha_S}y^{\beta_S}$ sur S ;
- $\eta(0,y) = u_T(0,y)\cdot\xi_T\cdot y^{\beta_T}$ sur T ;
- $\eta(0,0) = 0$ sur U.

On a donc $v(\eta(x,y)) = \eta^*(v(x),v(y))$ avec $\eta^* : v(\overline{S}) \to \mathbb{Z}$ définie par :

- $\eta^*(x',y') = v(\xi_S) + \alpha_S x' + \beta_S y'$ sur $v(S)$;
- $\eta^*(+\infty,y') = v(\xi_T) + \beta_T y'$ sur $v(T)$.
- $\eta^*(+\infty,+\infty) = +\infty$ sur $v(U)$.

$\|\eta\|$ continue sur $\overline{S} \Rightarrow \eta^*$ est continue sur $v(\bar{S})$.
Comme η^* est $\mathbb{Z}$-affine sur $v(S)$ et $\eta^* \neq +\infty$ sur $v(T)$, par la propriété de dichotomie $\eta^*_{|v(S)} = \eta^*_{|v(T)} \circ \pi_{\{2\}}$.



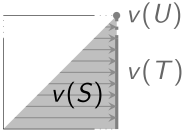
- $\eta(x,y) = u'(x,t) \cdot \xi_T \cdot y^{\beta_T}$ sur S ;
- $\eta(0,y) = u_T(0,y) \cdot \xi_T \cdot y^{\beta_T}$ sur T ;
- $\eta(0,0) = 0$ sur U.

On a donc $v(\eta(x,y)) = \eta^*(v(x), v(y))$ avec $\eta^* : v(\overline{S}) \to \mathbb{Z}$ définie par :

- $\eta^*(x', y') = v(\xi_T) + \beta_T y'$ sur $v(S)$;
- $\eta^*(+\infty, y') = v(\xi_T) + \beta_T y'$ sur $v(T)$.
- $\eta^*(+\infty, +\infty) = +\infty$ sur $v(U)$.

$\|\eta\|$ continue sur $\overline{S} \Rightarrow \eta^*$ est continue sur $v(\bar{S})$.
Comme η^* est $\mathbb{Z}$-affine sur $v(S)$ et $\eta^* \neq +\infty$ sur $v(T)$, par la propriété de dichotomie $\eta^*_{|v(S)} = \eta^*_{|v(T)} \circ \pi_{\{2\}}$. Pour tout $(x,y) \in S \cup T$ on a donc :

$$v(\eta(x,y)) = \eta^*(v(x), v(y)) = \eta^*(+\infty, v(y)) = v(\xi_T) + \beta_T v(y).$$



- $\eta(x,y) = u'(x,t) \cdot \xi_T \cdot y^{\beta_T}$ sur S ;
- $\eta(0,y) = u_T(0,y) \cdot \xi_T \cdot y^{\beta_T}$ sur T ;
- $\eta(0,0) = 0$ sur U.

On a donc $v(\eta(x,y)) = \eta^*(v(x), v(y))$ avec $\eta^* : v(\overline{S}) \to \mathbb{Z}$ définie par :

- $\eta^*(x', y') = v(\xi_T) + \beta_T y'$ sur $v(S)$;
- $\eta^*(+\infty, y') = v(\xi_T) + \beta_T y'$ sur $v(T)$.
- $\eta^*(+\infty, +\infty) = +\infty$ sur $v(U)$.

$\|\eta\|$ continue sur $\overline{S} \Rightarrow \eta^*$ est continue sur $v(\bar{S})$.
Comme η^* est $\mathbb{Z}$-affine sur $v(S)$ et $\eta^* \neq +\infty$ sur $v(T)$, par la propriété de dichotomie $\eta^*_{|v(S)} = \eta^*_{|v(T)} \circ \pi_{\{2\}}$. Pour tout $(x,y) \in S \cup T$ on a donc :

$$v(\eta(x,y)) = \eta^*(v(x), v(y)) = \eta^*(+\infty, v(y)) = v(\xi_T) + \beta_T v(y).$$

Il suffit donc de poser $h(x,y) = \xi_T y^{\beta_T}$ sur $S \cup T$, et $h = 0$ sur U.