Université d'Angers

Topologie et calcul différentiel

Jean-Baptiste Campesato & Nicolas Raymond

Version du 19 octobre 2024

Table des matières

1 Topologie des espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés dans ce cours sont tous réels, i.e. le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel.
On appelle *norme* sur E une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(ii) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$
(iii) $\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*)

Définition 1.2. On appelle *espace vectoriel normé* un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Proposition 1.3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors*
1. $\|0\| = 0$,
2. $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
3. $\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (inégalité triangulaire inversée).

Démonstration.

1. Pour éviter toute confusion, on note $\mathbf{0} \in E$ et $0 \in \mathbb{R}$. Alors $\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot \mathbf{0}\| = |0|\|\mathbf{0}\| = 0$.
2. Soit $x \in E$ alors $0 = \|\mathbf{0}\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1|\|x\| = 2\|x\|$, d'où $\|x\| \geq 0$.
3. Soient $x, y \in E$ alors $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ d'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
De même, on a $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\|$.
Donc $|\|x\| - \|y\|| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) \leq \|x - y\|$. ■

Proposition 1.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F, appelée* norme induite.

Exemples 1.5. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^d$.

1. $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $\|(x_1, \ldots, x_d)\|_p := \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p}$, où $p \geq 1$,
2. $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $\|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_d|)$.

On vérifie aisément que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.
Concernant $\|\cdot\|_p$, lorsque $p > 1$, on pourra consulter l'exercice 3.
La norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle norme euclidienne *sur $\mathbb{R}^d$.*

Exemple 1.6. Soit X un ensemble. On considère E l'espace vectoriel des fonctions $X \to \mathbb{R}$ bornées.
On définit $\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbb{R}$ par $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.
Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E. Elle s'appelle *norme de convergence uniforme* puisque $(f_n)_n$ tend uniformément vers f si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0.

1.2 Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $a \in E$ et $r > 0$.
On appelle *boule ouverte centrée en a de rayon r* la partie

$$B(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| < r\}$$

et *boule fermée centrée en a de rayon r* la partie

$$B_f(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}.$$

Définition 1.8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $U \subset E$ est *ouverte dans* E (ou *un ouvert de* E) si
$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset U$$
et que $C \subset E$ est *fermée* (ou *un fermé*) si $E \setminus C$ est ouverte.

Proposition 1.9. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors*
1. *$\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.*
2. *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
4. *Une union finie de fermés est un fermé.*
5. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Démonstration.

1. L'énoncé $\forall x \in \varnothing,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset \varnothing$ est vrai puisque l'on quantifie universellement sur l'ensemble vide. Donc $\varnothing$ est un ouvert et $E = \varnothing^c$ est un fermé.
Soit $x \in E$ alors $B(x,1) \coloneqq \{y \in E\ :\ \|y-x\| < 1\} \subset E$.
Donc E est un ouvert et $\varnothing = E^c$ est un fermé.

2. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$.
Puisque O_i est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O_i$. Donc $B(x,\varepsilon) \subset O_i \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
On a bien montré que $\forall x \in \bigcup_{i\in I} O_i,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, i.e. que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert.

3. Soient $O_1, \dots, O_r$ des ouverts de E. Soit $x \in O_1 \cap \dots \cap O_r$.
Soit $i = 1, \dots, r$. Puisque O_i est ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$.
Posons $\varepsilon \coloneqq \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ alors $\varepsilon > 0$ et $B(x,\varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_r$.
On a bien montré que $\forall x \in O_1 \cap \dots \cap O_r,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_r$, i.e. que $O_1 \cap \dots \cap O_r$ est un ouvert.

4. Soient $C_1, \dots, C_r$ des fermés de E. Alors $\left(C_1 \cup \dots \cup C_r\right)^c = C_1^c \cap \dots \cap C_r^c$ est un ouvert comme intersection finie d'ouverts. Donc $C_1 \cup \dots \cup C_r$ est un fermé.

5. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E. Alors $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} C_i^c$ est un ouvert comme union d'ouverts. Donc $\bigcap_{i\in I} C_i$ est un fermé. ■

Remarque 1.10. Une intersection quelconque d'ouverts (resp. une union quelconque de fermés) peut ne pas être un ouvert (resp. un fermé). En effet, considérons l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right[$ est un ouvert mais $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right[= \{0\}$ n'est pas ouvert.

Définition 1.11. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On définit l'*intérieur* de S par
$$\mathring{S} \coloneqq \{x \in E\ :\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset S\}$$
et l'*adhérence* de S par
$$\overline{S} \coloneqq \{x \in E\ :\ \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing\}.$$

Définition 1.12. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On dit que S est *dense* dans E si $\overline{S} = E$.

Proposition 1.13. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors*
1. $\overline{S^c} = (\mathring{S})^c$,
2. $\widehat{S^c}^{\circ} = (\overline{S})^c$,
3. $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$,
4. *$\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S,*
5. *$\overline{S}$ est le plus petit fermé contenant S.*

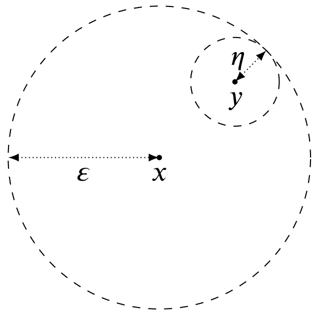
Démonstration.

1. $(\mathring{S})^c = \left\{x \in E \;:\; \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing\right\} = \overline{S^c}$

2. $(\overline{S})^c = (\overline{S^{cc}})^c = \left(\overset{\circ}{\widehat{S^c}}\right)^{cc} = \overset{\circ}{\widehat{S^c}}$

3.
   - Soit $x \in \mathring{S}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset S$. Donc $x \in B(x,\varepsilon) \subset S$.
   - Soit $x \in S$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $x \in B(x,\varepsilon) \cap S$, donc $B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$. Ainsi $x \in \overline{S}$.

4. Soit $x \in \mathring{S}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset S$.
   Soit $y \in B(x,\varepsilon)$. Posons $\eta \coloneqq \varepsilon - \|x-y\|$ alors $\eta > 0$.
   Soit $z \in B(y,\eta)$ alors



$$\begin{aligned} \|x-z\| &= \|x-y+y-z\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-z\| \\ &< \|x-y\| + \eta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   Donc $z \in B(x,\varepsilon) \subset S$ et ainsi $y \in \mathring{S}$.
   On a bien montré que $\forall x \in \mathring{S},\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset \mathring{S}$, i.e. que $\mathring{S}$ est ouvert.

   Soit O un ouvert contenu dans S. Soit $x \in O$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O$.
   Ainsi $B(x,\varepsilon) \subset O \subset S$. Donc $x \in \mathring{S}$. D'où $O \subset \mathring{S}$.
   On a bien montré que $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S.

5. On a que $\overset{\circ}{\widehat{S^c}}$ est le plus grand ouvert contenu dans S^c.
   Donc, en passant au complémentaire, $\overline{S} = \left(\overset{\circ}{\widehat{S^c}}\right)^c$ est le plus petit fermé contenant S. ∎

Corollaire 1.14. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors*
1. *S est un ouvert si et seulement si $\mathring{S} = S$,*
2. *S est un fermé si et seulement si $\overline{S} = S$.*

Proposition 1.15. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors*

(i) $\forall S,T \subset E,\ S \subset T \implies \overline{S} \subset \overline{T}$

(ii) $\forall S \subset E,\ \overline{\overline{S}} = \overline{S}$

(iii) $\forall S,T \subset E,\ \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

(iv) $\forall S,T \subset E,\ \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$

(i') $\forall S,T \subset E,\ S \subset T \implies \mathring{S} \subset \mathring{T}$

(ii') $\forall S \subset E,\ \mathring{\mathring{S}} = \mathring{S}$

(iii') $\forall S,T \subset E,\ \overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} = \mathring{S} \cap \mathring{T}$

(iv') $\forall S,T \subset E,\ \overset{\circ}{\widehat{S \cup T}} \supset \mathring{S} \cup \mathring{T}$

Remarque 1.16. Les inclusions réciproques de (iv) et (iv') sont généralement fausses.
Considérons par exemple $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $S \coloneqq [-1,0[$ et $T \coloneqq]0,1]$, alors $\overline{S \cap T} = \varnothing \subsetneq \overline{S} \cap \overline{T} = \{0\}$.

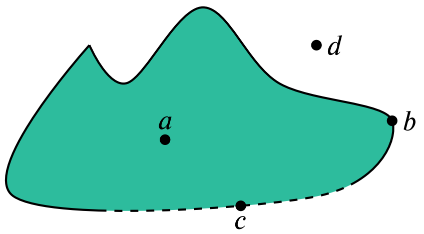
Définition 1.17. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On définit la *frontière* de S par $\partial S \coloneqq \overline{S} \setminus \mathring{S}$.

Proposition 1.18. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors*
1. (a) $\partial S = \left\{x \in E \;:\; \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing \text{ et } B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing\right\}$.
   (b) $\partial S = \partial\left(S^c\right)$.
2. (a) $\overline{S} = S \cup \partial S$.
   (b) *S est fermée si et seulement si $\partial S \subset S$.*
3. (a) $\mathring{S} \cap \partial S = \varnothing$.
   (b) *S est ouverte si et seulement si $\partial S \cap S = \varnothing$.*
4. *∂S est un fermé.*

Démonstration.

1. Découle immédiatement des définitions.
2. (a) On a $S \cup \partial S \subset \overline{S} \cup \partial S = \overline{S}$ et $\overline{S} = \mathring{S} \cup \partial S \subset S \cup \partial S$.
   (b) • Si S est fermée alors $\partial S \subset \overline{S} = S$.
   • Si $\partial S \subset S$ alors $\overline{S} = S \cup \partial S \subset S$ donc $\overline{S} = S$ et S est fermée.
3. (a) Par définition de ∂S.
   (b) S est ouverte $\Leftrightarrow$ S^c est fermée $\Leftrightarrow$ $\partial(S^c) \subset S^c \Leftrightarrow \partial S \subset S^c \Leftrightarrow \partial S \cap S = \varnothing$.
4. $\partial S = \overline{S} \cap \left(\mathring{S}\right)^c$ est l'intersection de deux fermés.

■



$a \in S$	$a \in \mathring{S}$	$a \in \overline{S}$	$a \notin \partial S$
$b \in S$	$b \notin \mathring{S}$	$b \in \overline{S}$	$b \in \partial S$
$c \notin S$	$c \notin \mathring{S}$	$c \in \overline{S}$	$c \in \partial S$
$d \notin S$	$d \notin \mathring{S}$	$d \notin \overline{S}$	$d \notin \partial S$

Figure : Représentation de l'intérieur, de l'adhérence et de la frontière.

1.3 Continuité

Définition 1.19. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $S \subset E$.
On dit que $f : S \to F$ est *continue* si

$$\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in S, \|x-y\|_E \leq \eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.20. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.*
Soient $S \subset E$ et $f : S \to F$, alors les énoncés suivants sont équivalents :
(i) f est continue
(ii) Pour tout ouvert U de F, il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$
(iii) Pour tout fermé C de F, il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$

Démonstration.

- Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$.
  Soit U un ouvert de F. Soit $a \in f^{-1}(U)$ alors $f(a) \in U$ et il existe $\varepsilon_a > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon_a) \subset U$.
  Par continuité de f, il existe $\eta_a > 0$ tel que $f\left(B(a,\eta_a) \cap S\right) \subset B(f(a), \varepsilon_a) \subset U$.
  Ainsi $B(a, \eta_a) \cap S \subset f^{-1}(U)$.
  Posons $V \coloneqq \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} B(a, \eta_a)$. Alors V est un ouvert de E comme union d'ouverts et
  $$V \cap S = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} B(a, \eta_a) \cap S \subset f^{-1}(U) \subset V \cap S.$$
- Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$.
  Soient $a \in S$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}\left(B(f(a), \varepsilon)\right) = V \cap S$.
  Puisque $a \in V$ et que V est un ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset V$.
  Ainsi $f(B(a,\eta) \cap S) \subset f(V \cap S) = f\left(f^{-1}\left(B(f(a), \varepsilon)\right)\right) \subset B(f(a), \varepsilon)$.
- Enfin (ii) et (iii) sont équivalents en passant au complémentaire. ■

Proposition 1.21. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.*
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, *alors les énoncés suivants sont équivalents :*
(i) *f est continue ;*
(ii) *f est continue en 0 ;*
(iii) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration.

- L'implication $(i)\Rightarrow(ii)$ est vraie car une fonction continue est continue en chaque point de son domaine par définition.

- Montrons que $(ii)\Rightarrow(iii)$.
Supposons que f soit continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in E,\ \|x\|_E \leq \eta \implies \|f(x)\|_F \leq 1.$$
Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\|f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \leq 1$ d'où $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Et $\|f(0)\|_F = 0 \leq \frac{1}{\eta}\|0\|_E$.
Donc $M \coloneqq \frac{1}{\eta}$ convient.

- Montrons que $(iii)\Rightarrow(i)$.
Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.
Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\eta \coloneqq \frac{\varepsilon}{M+1}$ alors $\eta > 0$.
Soit $y \in E$ tel que $\|x-y\|_E \leq \eta$ alors
$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E \leq \varepsilon\frac{M}{M+1} \leq \varepsilon.$$
On a bien montré que
$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E,\ \|x-y\|_E \leq \eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F \leq \varepsilon,$$
i.e. que f est continue. ■

Corollaire 1.22. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de E dans F.*
Pour $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on pose $|||L||| \coloneqq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F$.
Alors
1. $\forall L \in \mathcal{L}_c(E,F), |||L||| < \infty$,
2. *Si $E \neq \{0\}$ alors* $\forall L \in \mathcal{L}_c(E,F), |||L||| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{0<\|x\|_E\leq 1} \dfrac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F$,
3. $|||\cdot|||$ *est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, appelée* norme d'opérateur *ou* norme subordonnée,
4. $\forall L \in \mathcal{L}_c(E,F), \forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq |||L|||\|x\|_E$,
5. *Si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un espace vectoriel normé, alors* $\forall L \in \mathcal{L}_c(E,F), \forall K \in \mathcal{L}_c(F,G), |||K \circ L||| \leq |||K||||||L|||$.

1.4 Suites dans un espace vectoriel normé

Définition 1.23. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Soient $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$.
On dit que $(x_n)_n$ *tend* vers ℓ, ou que $(x_n)_n$ admet ℓ pour limite, noté $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$, si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$
On dit qu'une suite est *convergente* si elle admet une limite.

Remarque 1.24. On peut se ramener à l'étude d'une suite réelle : en effet, on vérifie aisément que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

Proposition 1.25. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.*
Soient $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E et $\ell_1, \ell_2 \in E$.
Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_2$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0,\ n \geq N_1 \implies \|\ell_1 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq n_0,\ n \geq N_2 \implies \|\ell_2 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $n \coloneqq \max(n_0, N_1, N_2)$ alors $\|\ell_1 - \ell_2\| \leq \|\ell_1 - x_n\| + \|x_n - \ell_2\| \leq \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\|\ell_1 - \ell_2\| \leq \varepsilon$, donc $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$, i.e. $\ell_1 = \ell_2$. ■

Lemme 1.26. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.*
Si une suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ d'éléments de E converge alors elle est bornée, i.e. $\exists M \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ \|x_n\| \leq M$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$.
Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq 1$.
Posons $r \coloneqq \max(n_0, N)$. Pour $n \geq r$, on a donc $\|x_n\| \leq 1 + \|\ell\|$.
Posons $M \coloneqq \max\left(\|x_{n_0}\|, \|x_{n_0+1}\|, \dots, \|x_{r-1}\|, 1 + \|\ell\|\right)$.
Alors $M \geq 0$ et on a bien $\forall n \geq n_0,\ \|x_n\| \leq M$. ■

Proposition 1.27. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.*
Si une suite d'éléments de S converge alors sa limite est dans $\overline{S}$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de S convergeant vers $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in \overline{S}$.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $n \coloneqq \max(n_0, N)$ alors $x_n \in S$ et $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, d'où $x_n \in B(\ell, \varepsilon)$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ B(\ell, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing$, i.e. $\ell \in \overline{S}$. ■

Corollaire 1.28. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors S est fermée si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de S, la limite est dans S, i.e.*

$$\forall (x_n)_n \in S^{\mathbb{N}},\ \left(\exists \ell \in E,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell\right) \implies \ell \in S.$$

Démonstration. Supposons que S soit fermée. Alors la limite de toute suite convergente d'éléments de S est dans $\overline{S} = S$ d'après la proposition précédente.

Réciproquement, supposons que toute suite convergente d'éléments de S converge dans S.
Soit $x \in \overline{S}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap S$ par définition de l'adhérence.
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de S convergeant vers x. Donc $x \in S$ par hypothèse.
On a ainsi montré que $\overline{S} \subset S$ et donc que $\overline{S} = S$. Ainsi S est un fermé de E. ■

Proposition 1.29. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.*
Soient $S \subset E$, $a \in S$ et $f : S \to F$.
Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. Commençons par supposer que f est continue en a.
Soit $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in S,\ \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$$

Puisque (x_n) converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies \|x_n - a\|_E \leq \eta$.
Soit $n \geq N$ alors $\|x_n - a\|_E \leq \eta$ et donc $\|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies \|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$,
i.e. que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Montrons désormais la contraposée de la réciproque. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$.
Puisque $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$ et $\|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon$.
Soit $\eta > 0$. Puisque $(x_n)_n$ converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies \|x_n - a\|_E \leq \eta$.
Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ et $\|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon$. Alors $x_n \in S$, $\|x_n - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon$.
On a bien montré que $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists x \in S$, $\|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - f(a)\| > \varepsilon$, i.e. que f n'est pas continue en a. ■

On démontre aisément le lemme suivant par récurrence.

Lemme 1.30. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

Définition 1.31. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E.
On appelle *sous-suite* (ou *suite extraite*) de $(x_n)_{n\geq n_0}$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Proposition 1.32. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$.
Si $(x_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\geq n_0}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de $(x_n)_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq n_0$ tel que $n \geq N$. Alors $\varphi(n) \geq n_0$ et $\varphi(n) \geq N$. Donc $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$.
On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $n \geq N \implies \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$, i.e. que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ. ■

1.5 Compacité

Définition 1.33. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On dit que S est *compacte* si de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergeant **dans** S.

Proposition 1.34. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact. Soit $S \subset K$.
Si S est fermée alors S est compacte.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de S.
Puisque c'est en particulier une suite d'éléments de K compacte, il existe $\ell \in K$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ.
Puisque $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite d'éléments de S, on a que $\ell \in \overline{S} = S$.
On a bien montré que de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergeant dans S, i.e. que S est une partie compacte. ■

Définition 1.35. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $S \subset E$ est *bornée* si

$$\exists M \geq 0, \forall x \in S, \|x\| \leq M.$$

Proposition 1.36. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute partie compacte de E est fermée et bornée.*

Démonstration.

- Montrons d'abord que si K est une partie compacte alors elle est fermée.
  Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de K convergeant vers $\ell \in E$. Il suffit de montrer que $\ell \in K$.
  Puisque K est compacte, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ converge vers $\tilde{\ell} \in K$.
  Or $(x_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ converge aussi vers ℓ, comme suite extraite d'une suite convergente.
  Par unicité de la limite, on obtient que $\ell = \tilde{\ell} \in K$.

- Montrons par contraposition que si K est une partie compacte alors elle est bornée.
  Supposons que K soit une partie non-bornée de E.
  Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$.
  Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite n'admet pas de sous-suite convergeant dans K.
  Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors $\|x_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \geq n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
  Donc $(x_{\varphi(n)})_n$ n'est pas bornée et n'est donc pas convergente. Ainsi K n'est pas compacte. ■

Corollaire 1.37. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact non-vide.*
Alors $\min_{x\in K} \|x\|$ et $\max_{x\in K} \|x\|$ sont bien définis.

Démonstration. Montrons que $\max_{x\in K} \|x\|$ est bien défini, la démonstration est similaire pour le minimum.
Puisque K est compacte et non-vide, $\{\|x\| \ : \ x \in K\}$ est une partie majorée et non-vide de $\mathbb{R}$.
Ainsi $M \coloneqq \sup_{x\in K} \|x\|$ est bien défini. Il reste à montrer que M est atteint.
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par définition de la borne supérieure, il existe $x_n \in K$ tel que $M - \frac{1}{n} < \|x_n\| \leq M$.
Puisque K est compacte, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ converge vers $\ell \in K$. Puisque $M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} < \|x_n\| \leq M$, en passant à la limite il vient $\|\ell\| = M$.
Il existe donc bien $\ell \in K$ tel que $\|\ell\| = \sup_{x\in K} \|x\|$. ■

Proposition 1.38. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.*
Soient $S \subset E$ et $f : S \to F$ une fonction continue.
Si K est un compact de E inclus dans S alors $f(K)$ est compacte.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$.
Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.
Puisque $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de K compacte, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $\ell \in K$. Par continuité de f, il vient que $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(\ell) \in f(K)$.
Donc $f(K)$ est compacte. ■

Remarque 1.39. On déduit des deux résultats précédents qu'une fonction continue sur un compact non-vide est bornée et atteint ses bornes : ce résultat généralise le théorème de Weierstrass stipulant qu'une fonction continue sur un segment non-vide est bornée et atteint ses bornes.

1.6 Comparaison de normes

Définition 1.40. Soit E un espace vectoriel. Soient N et N' deux normes sur E.
On dit que N et N' sont *équivalentes* si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Proposition 1.41. *Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.*

Exemple 1.42.
1. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty$.
3. En particulier, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.43. *Soit E un espace vectoriel. Deux normes N et N' sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie[1] sur E.*

Démonstration.

- Supposons que N et N' soient deux normes équivalentes sur E. Montrons qu'un ouvert pour N' est un ouvert pour N (par symétrie, on a aussi qu'un ouvert pour N est un ouvert pour N').
  Soit O un ouvert pour N'. Soit $x \in O$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{N'}(x, \varepsilon) \subset O$.
  Il existe $\beta > 0$ tel que $\forall x \in E,\ N'(x) \leq \beta N(x)$.
  Soit $y \in B_N\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right)$ alors $N'(x-y) \leq \beta N(x-y) < \varepsilon$. Donc $B_N\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subset B_{N'}(x,\varepsilon) \subset O$.
  Ainsi O est un ouvert pour N.

- Supposons que N et N' soient deux normes sur E définissant la même topologie.
  La boule unité $B_N(0,1)$ est un ouvert pour N et donc pour N'.
  Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{N'}(0,\varepsilon) \subset B_N(0,1)$.
  Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $\frac{\varepsilon}{2N'(x)}x \in B_{N'}(0,\varepsilon) \subset B_N(0,1)$. Ainsi $N\left(\frac{\varepsilon}{2N'(x)}x\right) < 1$, i.e. $\frac{\varepsilon}{2}N(x) < N'(x)$.
  On a donc montré que $\forall x \in E,\ \frac{\varepsilon}{2}N(x) \leq N'(x)$. L'autre inégalité s'obtient de façon similaire en intervertissant N et N'.
  Donc N et N' sont équivalentes. ∎

1.7 Cas de la dimension finie

Proposition 1.44. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, alors*
1. *Toutes les normes sur E sont équivalentes,*
2. *Les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées.*

Remarque 1.45. La proposition précédente est fausse si on ne suppose pas que E est de dimension finie.
Considérons l'espace vectoriel $\ell^\infty \coloneqq \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ :\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$ muni de la norme $\|(x_n)_n\|_\infty \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Soit $(u_n)_n$ la suite de ℓ^∞ définie par $u_{n,k} = 1$ si $k = n$ et $u_{n,k} = 0$ sinon.
Alors $(u_n)_n$ est une suite de $B_f(0,1)$ n'admettant pas de sous-suite convergente.

On peut plus généralement démontrer qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte (lemme de Riesz, voir l'Exercice 19).

Lemme 1.46. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E.*
On définit $\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbb{R}$ par $\left\| \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \right\|_\infty = \max_{i=1,\dots,d} |\lambda_i|$, alors
1. *$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E,*
2. *Pour tout $a > 0$, $B_f(0,a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$,*
3. *Les compacts de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.*

Démonstration.
1. C'est laissé en exercice.
2. Soit $a > 0$. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $B_f(0,a)$. On note $x_n = \sum \lambda_n^i e_i$.
   Alors $|\lambda_n^1| \leq \|x_n\|_\infty \leq a$. Ainsi $(\lambda_n^1)_n$ est une suite réelle bornée.
   Donc il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\lambda^1_{\varphi_1(n)})_n$ converge vers $\ell_1 \in [-a,a]$.
   De même, il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\lambda^2_{\varphi_1(\varphi_2(n))})_n$ converge vers $\ell_2 \in [-a,a]$. Et ainsi de suite.
   On pose $\varphi \coloneqq \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_d$. Alors φ est strictement croissante et $(\lambda^i_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ_i.
   On pose $\ell \coloneqq (\ell_1, \dots, \ell_d)$ alors $\ell \in B_f(0,a)$ et $\|x_{\varphi(n)} - \ell\|_\infty \leq \sum_{i=1}^d |\lambda^i_{\varphi(n)} - \ell_i| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc $B_f(0,a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

[1] i.e. une partie est ouverte pour N si et seulement si elle est ouverte pour N'.

3. On sait déjà qu'un compact est fermé et borné. Il reste à vérifier qu'un fermé et borné est compact. Soit K une partie fermée et bornée. Puisque K est bornée, il existe $a > 0$ tel que $K \subset B_f(0, a)$. Donc K est un fermé inclus dans un compact et est donc compact. ■

Démonstration de la Proposition 1.44. On fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E.

- Montrons d'abord que $\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ est continue.
  Soit $x \in E$. Notons $x = \sum \lambda_i e_i$ alors
  $$\begin{aligned}\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i\right\| &\leq \sum_{i=1}^d |\lambda_i|\|e_i\| \\ &\leq \max(\|e_1\|, \dots, \|e_d\|) \sum_{i=1}^d |\lambda_i| \\ &\leq d \max(\|e_1\|, \dots, \|e_d\|)\|x\|_\infty\end{aligned}$$
  On a donc montré qu'il existe $M \coloneqq d \max(\|e_1\|, \dots, \|e_d\|) \geq 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|\mathrm{id}(x)\| \leq M\|x\|_\infty$. Puisque $\mathrm{id} : E \to E$ est linéaire, on déduit de la Proposition 1.21 que $\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ est continue.

- Montrons que $S \coloneqq \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
  Tout d'abord S est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue : $S = (\|\cdot\|_\infty)^{-1}(\{1\})$.
  De plus S est inclus dans $B_{f,\|\cdot\|_\infty}(0, 1)$ qui est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
  Donc S est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ comme fermé inclus dans un compact.

- Ainsi S est un compact de $(E, \|\cdot\|)$ comme image d'un compact par $\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ continue. Donc $\alpha \coloneqq \min_{x\in S} \|x\|$ et $\beta \coloneqq \max_{x\in S} \|x\|$ existent. De plus, $\alpha, \beta > 0$ puisque $0 \notin S$.
  Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$ donc $\alpha \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \leq \beta$ et ainsi $\alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty$.
  On a bien montré qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E,\ \alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty$, i.e. que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
  Donc toutes les normes de E sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$.

- On a déjà vu qu'un compact de $(E, \|\cdot\|)$ est fermé et borné. Il reste à montrer qu'une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte.
  Soit K une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|)$. Alors K est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ puisque les normes sont équivalentes.
  On sait qu'il existe $M \geq 0$ tels que $\forall x \in K,\ \|x\| \leq M$. Ainsi $\forall x \in K,\ \|x\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha}$. Donc K est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ car fermé et borné.
  Puis K est un compact de $(E, \|\cdot\|)$ comme image d'un compact par $\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ continue. ■

Proposition 1.47. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire $E \to F$ est continue, i.e. $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. On fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E.
Puisque E est de dimension finie, $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et il existe donc $\beta > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty \leq \beta\|x\|_E$.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $x \in E$.
Posons $M \coloneqq \max(\|f(e_1)\|_F, \dots, \|f(e_d)\|_F)$ et notons $x = \sum \lambda_i e_i$ alors
$$\|f(x)\|_F = \left\|f\left(\sum \lambda_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_i \lambda_i f(e_i)\right\| \leq \sum |\lambda_i| \left\|f(e_i)\right\| \leq M \sum |\lambda_i| \leq M\|x\|_\infty \leq M\beta\|x\|_E.$$
Donc f est continue d'après la Proposition 1.21. ■

1.8 Connexité par arcs

Définition 1.48. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $S \subset E$ est *connexe par arcs* si pour tout $a, b \in S$, il existe une fonction $\gamma : [0,1] \to E$ continue vérifiant (i) $\gamma(0) = a$, (ii) $\gamma(1) = b$, et (iii) $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in S$.

Lemme 1.49. *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration.

- Soit I un intervalle non-vide (sinon $I = \varnothing$ est clairement connexe par arcs).
  Soient $a, b \in I$. Définissons $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = a + t(b-a)$. Alors γ est continue, $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
  Soit $t \in [0,1]$, alors $a \leq \gamma(t) \leq b$ et donc $\gamma(t) \in I$.
  Donc I est connexe par arcs.

- Soit I une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, que l'on peut supposer non-vide. Soient $a, b \in I$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq c \leq b$.
  Puisque I est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in I$.
  On déduit du théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $c = \gamma(t) \in I$.
  On a bien montré que $\forall a, b \in I$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $a \leq c \leq b \implies c \in I$, i.e. que I est un intervalle. ■

Proposition 1.50. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.*
Soient $S \subset E$ et $f : S \to F$ une fonction continue.
Si T est une partie connexe par arcs de E incluse dans S alors $f(T)$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soient $a, b \in f(T)$, alors il existe $\alpha, \beta \in T$ tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$.
Puisque T est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$ et $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in T$.
Posons $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : [0,1] \to F$. Alors $\tilde{\gamma}$ est continue, $\tilde{\gamma}(0) = a$, $\tilde{\gamma}(1) = b$ et $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{\gamma}(t) \in f(T)$.
Donc $f(T)$ est connexe par arcs. ■

Corollaire 1.51. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$ une partie connexe par arcs et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b \in S$ tels que $f(a) \leq f(b)$, alors $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists x \in S$, $f(x) = y$.*

1.9 Exercices

Exercice 1. Dessiner la boule fermée unité, i.e. centrée en 0 de rayon 1, pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\forall x \in E \setminus \{0\},\ N(x) > 0$
(ii) $N(0) = 0$
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in E,\ N(x + \lambda y) \leq N(x) + |\lambda| N(y)$
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 3. Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p > 1$. On définit $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$\|(x_1, \dots, x_d)\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. On pose $q \coloneqq \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   Montrer que $\forall a, b \geq 0,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

   On pourra commencer par appliquer la question précédente à $a \coloneqq \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ *et* $b \coloneqq \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$.
   Le cas $p = q = 2$ *est appelé* inégalité de Cauchy–Schwarz.
3. En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.
4. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 4. Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.
On définit $\|\cdot\|_p : C^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\|f\|_p \coloneqq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.
1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$.
   On pourra adapter les solutions de l'Exercice 3 en remplaçant $\sum$ *par* $\int$.
2. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 5. Montrer que les couples $(E, \|\cdot\|)$ suivants sont des espaces vectoriels normés :
1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|\cdot\|_m : \sum a_i X^i \mapsto \sum |a_i| m^i$ où $m \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. $E = \mathbb{R}\{x\}_\rho$ l'espace vectoriel des séries entières réelles de rayon de convergence $\geq \rho$ et

$$\|\cdot\|_m : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 0} |a_i| m^i$$

   où $m, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ et $m < \rho$.
3. $E = \mathrm{Lip}([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[a,b]$, où $a < b$, et

$$\|f\| \coloneqq \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x,y \in [a,b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

4. $E = \ell^p \coloneqq \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ :\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_p \coloneqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ où $p \in [1, \infty[$.
5. $E = \ell^\infty \coloneqq \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée} \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_\infty \coloneqq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

6. $E = C^0([a,b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions $[a,b] \to F$ continues $\|f\| \coloneqq \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_F$ où $a < b$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.
7. $E = \mathcal{B}(X, F)$ l'espace vectoriel des fonctions $X \to F$ bornées et $\|f\| \coloneqq \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|_F$ où X est un ensemble et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 6.

1. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés.
   Montrer que $(E \coloneqq E_1\times\ldots\times E_n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, où $\|(u_1, \dots, u_n)\| \coloneqq \max_{i=1,\dots,n}(\|u_i\|_i)$.
2. Soit $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels normés.
   Montrer que l'espace vectoriel

$$E \coloneqq \left\{ (f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \ : \ \sup_{i\in I} \|f_i\|_i < \infty \right\}$$

   muni de l'application

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (f_i)_{i\in I} & \mapsto & \sup_{i\in I} \|f_i\|_i \end{array}$$

   est un espace vectoriel normé.

Exercice 7. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que l'espace vectoriel E/F muni de l'application

$$\|\cdot\|_{E/F} : \begin{array}{ccc} E/F & \to & \mathbb{R} \\ \overline{x} & \mapsto & \inf\limits_{u\in\overline{x}} \|u\| \end{array}$$

est un espace vectoriel normé.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.
Montrer que l'application $\|\cdot\|_E : (E, \|\cdot\|_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue.

Exercice 9.

1. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   (a) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{Q}$.
   (b) Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ?
   i. $\varnothing$ ii. $[42, +\infty[$ iii. $]-17, 9]$ iv. $]-\pi, \pi[$ v. $\mathbb{Q}$ vi. $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < |x+1| < 2\}$
2. Les parties suivantes de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sont-elles ouvertes ? fermées ?
   (a) $A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < |x + 1| < 2\}$
   (b) $B \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le y\}$
   (c) $C \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1 \text{ et } |y| \le 1\}$
   (d) $D \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
   (e) $E \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$
   (f) $F \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$

Exercice 10. Dans cet exercice E désigne l'espace des matrices carrées de taille $n\times n$ à coefficients réels. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par

$$\|M\|_\infty \coloneqq \max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |m_{ij}| .$$

1. Montrer que (A_n) converge vers $L = (\ell_{ij}) \in E$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\lim_{n\to+\infty} a_{ij,n} = \ell_{ij}$.
2. Établir que

$$\sum_{n\ge0} \|M_n\|_\infty < +\infty \Longrightarrow \sum_{n\ge0} M_n \text{ converge} .$$

3. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles, noté $GL_n(\mathbb{R})$, est un ouvert de E.
   Indice : On pourra considérer une matrice A inversible, remarquer que $A + M = A(\mathrm{Id} + A^{-1}M)$, choisir M de sorte que $\|A^{-1}M\|_\infty < 1$ et utiliser une série géométrique.
4. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E.

Exercice 11. On considère $E \coloneqq \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
On définit l'opérateur de Cesàro $T : E \to E$ par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_n$.
1. Montrer que T est bien défini.
2. Montrer que T est une application linéaire continue et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 12. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. Montrer que S est bornée si et seulement s'il existe $a \in E$ et $r \geq 0$ tels que $S \subset B(a, r)$.

Exercice 13.
1. Montrer qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.
2. Montrer qu'une union finie de compacts est compacte.
3. Une union quelconque de compacts est-elle nécessairement compacte ?

Exercice 14. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \cap K \neq \varnothing$.
Montrer que $K \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Exercice 15. Les parties suivantes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont-elles compactes ?
1. $\mathbb{Z}$ 2. $[0, 1[$ 3. $]-\infty, 1]$ 4. $[0, 1]$ 5. $\{-42, \pi, 17\}$ 6. $[e, 17[\cup]17, 42]$

Exercice 16. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \to F$ une application continue.
1. Si K est un compact de F, $f^{-1}(K)$ est-il nécessairement un compact de E ?
2. Montrer que c'est toujours le cas si S est compact.

Exercice 17. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.
1. Montrer que $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}),\ \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.
2. Montrer que $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}),\ \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.
3. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non-équivalentes sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
   Indice : pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (x-a)^n$.

Exercice 18. Soit $E \coloneqq \mathbb{R}[X]$.
1. On définit $N_1 : E \to \mathbb{R}$ par $N_1\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$.
   Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. Montrer que $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour la norme N_1.
3. On définit $N_2 : E \to \mathbb{R}$ par $N_2\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \coloneqq \left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$.
   Montrer que N_2 est une norme sur E.
4. Montrer que $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ pour la norme N_2.
5. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour $a \in E$, on note
$$d(a, F) \coloneqq \inf_{x\in F} \|x - a\|\,.$$
   (a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
   (b) On suppose que $F \neq E$. Soit $a \in E \smallsetminus F$ et $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
   Montrer qu'il existe $b \in E$ tel que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_n$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|b_n\| = 1$ et $d(b_n, \mathrm{Vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1$.
3. En déduire que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte (*lemme de Riesz*).

Exercice 20. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 21. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 22. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Que peut-on dire d'une partie A qui est à la fois ouverte et fermée ?
Indice : on considérera une telle partie A et on examinera la continuité de $\mathbb{1}_A$.

2 Calcul différentiel

2.1 Différentielle, propriétés élémentaires

2.1.1 Définitions

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application, et a un point de U. On peut avoir à l'esprit le cas très important où $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1. On dit que f est différentiable, ou aussi dérivable, au point a s'il existe une **application linéaire continue** $g : E \to F$ telle que

$$f(a+h) - f(a) - g(h) = o(h)$$

quand h tend vers 0 (le membre de gauche est bien défini si h est suffisamment proche de 0).

Unicité de l'application linéaire tangente. Une telle application g, si elle existe, est unique. En effet, soit $\tilde{g}$ une autre application linéaire continue telle que

$$f(a+h) - f(a) - \tilde{g}(h) = o(h)\,.$$

Alors $\tilde{g}(h) - g(h) = o(h)$ quand h tend vers 0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h dans E, si $\|h\| < \eta$, alors $\|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$. Pour tout h dans E tel que $\|h\| \leq 1$, nous avons $\|\frac{\eta}{2}h\| < \eta$. Par homogénéité, il vient

$$\|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon\|h\|\,.$$

On en tire : $\|\tilde{g} - g\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\tilde{g} = g$. Cet élément g de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_c(E,F)$ sera noté

$$df_a : E \to F$$

et appelé la **différentielle** (ou aussi dérivée) de f en a.

Proposition 2.2. *Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$,*

$$df_a(h) = f'(a)h\,.$$

Proposition 2.3. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

Définition 2.4. On dit que f est différentiable dans U si f est différentiable en tout point de U. L'application $x \mapsto df_x$ de U dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ est alors notée

$$df : U \to \mathcal{L}_c(E,F)$$

et appelée la différentielle de f.

On dit que f est continuement différentiable (ou aussi de classe C^1) en a si f est différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a dans U et si $df : V \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est continue en a (pour la structure usuelle d'espace vectoriel normé de $\mathcal{L}_c(E,F)$).

On dit que f est continuement différentiable (ou aussi de classe C^1) dans U si f est continuement différentiable en tout point de U, ou, de manière équivalente, si f est différentiable en tout point de U et si $df : U \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est continue.

2.1.2 Dérivée directionnelle et différentielle

Définition 2.5. On dit que $f : U \to F$ est différentiable en a dans la direction $h \in E$ lorsque

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

possède une limite quand t tend vers 0. Dans ce cas, on la note $\partial_h f(a) \in F$. Cette notion est parfois appelée "Gâteaux-différentiabilité".

Proposition 2.6. *Si f est différentiable en a, alors f est différentiable en a dans toute direction $h \in E$ et $df_a(h) = \partial_h f(a)$ pour tout h dans E.*

Remarque 2.7. Une fonction peut avoir des dérivées directionnelles dans toutes les directions en un point sans y être différentiable :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0\,.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$, mais n'y est pas différentiable.

2.1.3 En dimension finie

Un cas particulier très intéressant et utile concerne le cas où $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$ (le cas des fonctions de m variables). Si $(e_j)_{1\leq j\leq m}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^m$, la différentiabilité de f en a dans la direction e_j est la notion de dérivée partielle de f en a par rapport à la j-ième variable. L'usage est de noter

$$\partial_{e_j} f(a) = \partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,.$$

Quand f est différentiable en a, elle admet des dérivées partielles dans toutes les variables en a et, pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$,

$$\partial_j f(a) = df_a(e_j)\,.$$

On note $f = (f_1, \cdots, f_n)$. Nous verrons dans la prochaine section que f est différentiable en a si et seulement si les f_i le sont et que, dans ce cas,

$$df_a = ((df_1)_a, \cdots, (df_n)_a)\,.$$

Proposition 2.8. *Dans les bases canoniques de E et F, la matrice de df_a, appelée matrice jacobienne et notée $J_a(f)$, est*

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1\leq j\leq m\,,\,1\leq i\leq n}\,.$$

Le coefficient de i-ème ligne et de la j-ème colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

De plus, $J_a(f)H$ est le vecteur colonne des coordonnées de $df_a(h)$ dès que H désigne le vecteur colonne des coordonnées de h ; c'est aussi le vecteur colonne des coordonnées de la dérivée de f au point a dans la direction h.

Remarque 2.9. Lorsque $n = 1$, on note $\nabla f(a)$ le vecteur colonne $(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_m f(a))^{\mathrm{T}}$ et on l'appelle "gradient de f en a".

2.1.4 Propriétés élémentaires

Proposition 2.10. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F, a un point de U, f, f_1, $f_2 : U \to F$ et $g : V \to G$ des applications telles que $f(U)$ soit contenu dans V.*

Alors, nous avons la liste de propriétés suivantes :

1. *Si f est constante, alors f est différentiable en a et $df_a = 0$.*

2. *Si $f : U \to F$ est la restriction d'une application linéaire continue de E dans F, qu'on notera encore f, alors f est continuement différentiable dans U et, pour tout $x \in U$, on a :*

$$df_x = f\,.$$

3. *Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en a, et*
$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a \,.$$
En dimension finie et avec les notations de la Section 2.1.3, on a
$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g)\, J_a(f),$$
ce qui s'écrit :
$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\,.$$

4. *Si $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ est un produit d'espaces vectoriels normés, et $f = (f_n, \ldots, f_n)$, alors f est différentiable en a (resp. continuement différentiable en a, différentiable dans U, continuement différentiable dans U) si et seulement si f_i l'est pour tout $i = 1, \cdots, n$ et :*
$$df_a = (d(f_1)_a, \ldots, d(f_n)_a).$$

5. *Si $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un produit d'espaces vectoriels normés, et si f est la restriction d'une application multilinéaire continue, qu'on notera encore f, alors f est continuement différentiable dans U et pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in U$:*
$$\begin{aligned} &df_{(x_1,\cdots,x_n)} : \\ &(h_1, \cdots, h_n) \mapsto f(h_1, x_2, . \cdots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \cdots, x_n) + \cdots + f(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n). \end{aligned}$$

6. *Si f_1 et f_2 sont différentiables en a, alors $f_1 + \lambda f_2$ est différentiable en a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et :*
$$d(f_1 + \lambda f_2)_a = d(f_1)_a + \lambda d(f_2)_a.$$

7. *Si $F = \mathbb{R}$, si f_1 et f_2 sont différentiables en a, alors l'application produit $f_1 f_2$ (définie par $x \mapsto f_1(x) f_2(x)$) est différentiable en a et :*
$$d(f_1 f_2)_a = f_2(a) d(f_1)_a + f_1(a) d(f_2)_a.$$

8. *Si E et F sont des espaces de Banach[2], si $f(U)$ est un ouvert de F et si $f : U \to f(U)$ est un homéomorphisme, différentiable en a, tel que df_a soit une bijection de E sur F, alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et :*
$$d(f^{-1})_b = (df_{f^{-1}(b)})^{-1}\,.$$

9. *Si E et F sont des espaces de Banach, alors l'application $\varphi : \mathcal{GL}_c(E,F) \to \mathcal{GL}_c(F,E)$ définie par $u \mapsto u^{-1}$ est continuement différentiable sur $\mathcal{GL}_c(E,F)$ et sa différentielle en $u \in \mathcal{GL}_c(E,F)$ est l'application $d\varphi_u : \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathcal{L}_c(F,E)$ définie par :*
$$d\varphi_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}\,.$$

Démonstration. (1) est trivial. (2) vient du fait que :
$$f(a+h) - f(a) = f(h).$$
Montrons maintenant la formule de composition de (3). Il suffit d'écrire, pour $h \in E$ assez petit :
$$g \circ f(a+h) = g(f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)),$$

[2] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire dans lequel les suites de Cauchy sont convergentes. On peut penser ici à $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$.

où $\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. La formule de composition a bien un sens puisque $f(a) \in V$ implique, pour h assez petit, que $f(a+h) \in V$. On utilise ensuite la différentiabilité de g en $b = f(a)$:

$$g(f(a+h)) = g(b) + dg_b(df_a(h) + h\varepsilon_1(h)) + \|h\|\varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)).$$

On en tire :

$$g(f(a+h)) = g(b) + dg_b(df_a(h)) + dg_b(h\varepsilon_1(h)) + \|h\|\tilde{\varepsilon}_2(h),$$

avec $\tilde{\varepsilon}_2(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0 (on utilise la continuité de df_a) La continuité de dg_b fournit alors :

$$\|dg_b(h\varepsilon_1(h))\| \leq \|h\|\|dg_b\|\|\varepsilon_1(h)\|.$$

On s'intéresse maintenant à (4). Supposons que $f = (f_1, \cdots, f_n)$ est différentiable en a. On peut écrire que, pour h assez petit :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

On note p_i la projection canonique sur la i-ème composante de l'espace produit. L'application p_i est linéaire continue. On en déduit :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + p_i \circ df_a(h) + \|h\|p_i(\varepsilon(h)).$$

Inversement, supposons que les f_i soient différentiables en a; on peut écrire que :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + p_i \circ df_a(h) + \|h\|\varepsilon_i(h).$$

On en tire :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec $\varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), \cdots, \varepsilon_n(h))$.

On s'occupe maintenant de (5). Soit f une telle application multilinéaire. On sait qu'elle vérifie :

$$\|f(y_1, \cdots, y_n)\| \leq C\|y_1\| \cdots \|y_n\|.$$

On examine alors :

$$f(x+h) - f(x) - \left(f(h_1, x_2, . \cdots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \cdots, x_n) + \cdots + f(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n)\right).$$

Il s'agit d'une somme de termes de la forme $f(y_1, \cdots, y_n)$ avec au moins deux y_i distincts égaux à h_i. Ainsi, on peut écrire :

$$\|f(y_1, \cdots, y_n)\| \leq C\|x\|^{n-\alpha}\|h\|^\alpha,$$

où α est un entier au moins égal à 2.

L'assertion (6) résulte de (2), (3) et (4) via la composition par l'application linéaire continue : $(x, y) \mapsto x + \lambda y$.

L'assertion (7) est de même une conséquence de (3), (4) et (5) via la composition par l'application bilinéaire continue $(x, y) \mapsto xy$.

Montrons (8). Par le théorème des isomorphismes de Banach (voir Théorème 4.15) df_a est d'inverse continu. On peut donc considérer $c = \|df_a^{-1}\|$. On pose $y = f(x)$ et $b = f(a)$.

On observe que :

$$y - b - df_a(x-a) = \|x-a\|\varepsilon(x-a)$$

de sorte que

$$(df_a)^{-1}(y-b) - (x-a) = \|x-a\|df_a^{-1}(\varepsilon(x-a)).$$

On commence par en tirer que :

$$\|x-a\| \leq c(\|y-b\| + \|x-a\|\|\varepsilon(x-a)\|).$$

Pour y suffisamment proche de b, on a (continuité de f^{-1}) x proche de a de sorte qu'on ait : $\|\varepsilon(x-a)\| \leq (2c)^{-1}$ d'où l'on tire :

$$\|x-a\| \leq 2c\|y-b\|.$$

On en déduit que :

$$\|f^{-1}(y) - b - (df_a)^{-1}(y-b)\| \leq \|y-b\|\|\tilde{\varepsilon}(y-b)\|.$$

On traite le point (9). Commençons par montrer que $\mathcal{GL}_c(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Soit $u_0 \in \mathcal{GL}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(E,F)$ tel que $\|v\| < \|u_0^{-1}\|^{-1}$. On a :

$$u_0 + v = u_0(\mathrm{Id} + u_0^{-1}v)$$

et $\|u_0^{-1}v\| \leq \|u_0^{-1}\|\|v\| < 1$ de sorte que $\mathrm{Id} + u_0^{-1}v$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k$. En particulier, on obtient :

$$(u_0+v)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k u_0^{-1}.$$

Cela implique notamment que :

$$(u_0+v)^{-1} - u_0^{-1} = -u_0^{-1}vu_0^{-1} + \sum_{k\geq 2}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k u_0^{-1}.$$

L'inégalité triangulaire et la formule pour la somme du série géométrique fournit alors

$$\left\|\sum_{k\geq 2}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k u_0^{-1}\right\| \leq \|u_0^{-1}\| \sum_{k=2}^{+\infty}\|u_0^{-1}v\|^k = \|u_0^{-1}\|\|u_0^{-1}v\|^2(1-\|u_0^{-1}v\|)^{-1}.$$

Le conclusion sur la différentiabilité en u_0 s'ensuit. Pour la continuité de la différentielle (par rapport à u), il suffit de voir que l'application $(v,w) \mapsto -v \circ \cdot \circ w$ de $\mathcal{L}_c(F,E) \times \mathcal{L}_c(F,E)$ à valeurs dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c(E,F), \mathcal{L}_c(F,E))$ est bilinéaire et continue.

■

2.2 Accroissements finis

2.2.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.11. *Soient $I = [\alpha,\beta]$, F un evn et $\Phi : I \to F$, $\phi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que ϕ et Φ sont dérivables sur I et qu'on a :*

$$\|\Phi'(x)\| \leq \phi'(x), \quad \forall x \in I.$$

Alors :

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble A défini par :

$$A = \{\gamma \in I : \forall t \in [\alpha,\gamma], \quad \|\Phi(t) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(t) - \phi(\alpha) + \varepsilon(t-\alpha)\}.$$

On a : $\alpha \in A$, donc A est non vide, A est majoré par β. A admet donc une borne supérieure notée $\theta \in [\alpha,\beta]$. Il est aisé de constater que A est fermé dans $[\alpha,\beta]$ puisque ϕ et Φ sont continues sur I. La borne supérieure de A est donc atteinte et par conséquent on a :

$$A = [\alpha,\theta].$$

Il s'agit de montrer que $\theta = \beta$. On suppose que $\theta < \beta$.

On a :

$$\|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha).$$

ϕ et Φ sont dérivables en θ, il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour $t \in [0,\delta]$:

$$\|\Phi(\theta+t) - \Phi(\theta) - t\Phi'(\theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}t, \quad \|\phi(\theta+t) - \phi(\theta) - t\phi'(\theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}t.$$

Examinons alors :

$$\|\Phi(\theta+t) - \Phi(\alpha)\| \leq \|\Phi(\theta+t) - \Phi(\theta)\| + \|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\|.$$

Il s'ensuit que :

$$\|\Phi(\theta+t)-\Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta)-\phi(\alpha)+\varepsilon(\theta-\alpha)+\|\Phi(\theta+t)-\Phi(\theta)\|.$$

On en tire :

$$\|\Phi(\theta+t)-\Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta)-\phi(\alpha)+\varepsilon(\theta-\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}t+t\|\Phi'(\theta)\|$$

et

$$\|\Phi(\theta+t)-\Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta)-\phi(\alpha)+\varepsilon(\theta-\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}t+t\|\phi'(\theta)\|$$

d'où :

$$\|\Phi(\theta+t)-\Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta+t)-\phi(\alpha)+\varepsilon(\theta-\alpha)+\varepsilon t.$$

Ainsi, on a : $\theta+\delta \in A$ et c'est contradictoire. On en déduit $\theta=\beta$ et donc :

$$\|\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\| \leq \phi(\beta)-\phi(\alpha)+\varepsilon(\beta-\alpha)$$

et ce pour tout $\varepsilon>0$. ∎

2.2.2 Applications

Soient E, F des evn, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application C^1. Soient aussi a_0 et a_1 deux points de U tels que le segment les joignant soit encore dans U. Pour $t \in [0,1]$, on pose : $a_t = (1-t)a_0 + ta_1$. On introduit :

$$\Phi(t) = f(a_t)$$

et on a :

$$\Phi'(t) = df_{a_t}(a_1-a_0)\,.$$

Proposition 2.12. *S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\|df_{a(t)}(a_1-a_0)\| \leq M$, alors :*

$$\|f(a_1)-f(a_0)\| \leq M\,.$$

Proposition 2.13. *S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\|df_{a(t)}\| \leq M$, alors :*

$$\|f(a_1)-f(a_0)\| \leq M\|a_1-a_0\|\,.$$

Proposition 2.14. *Si U est connexe par arcs et que la différentielle de f est nulle sur U, alors f est constante sur U.*

Proposition 2.15. *Supposons que U est convexe et qu'il existe $M \geq 0$ tel qu'on ait l'inégalité $\|df_x\| \leq M$ pour tout $x \in U$, alors f est M-lipschitzienne.*

2.3 Différentielles partielles et d'ordre deux

2.3.1 Différentielles partielles

Soient $E_1, \cdots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés, E l'espace vectoriel normé produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la norme $\|(x_1,\cdots,x_n)\| = \max(\|x_1\|,\cdots,\|x_n\|)$), U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application et $i \in \{1,\cdots,n\}$.

Définition 2.16. Pour tout $a=(a_1,\cdots,a_n)$ dans U, on dit que f est différentiable (ou dérivable) par rapport à la i-ème variable en a si l'application (parfois appelée la i-ème application partielle) $x \mapsto f(a_1,\cdots,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n)$ est différentiable en a_i.

La différentielle en a_i de cette application, qui est un élément de $\mathcal{L}_c(E_i,F)$, est notée

$$\partial_i f_a \quad \text{ou} \quad \partial_j f(a)$$

et appelée la i-ème différentielle partielle (ou i-ème dérivée partielle) de f en a. Il s'agit d'une généralisation des dérivées partielles (qui correspondent au cas où $E_1 = \ldots = E_n = \mathbb{R}$).

Proposition 2.17. *Si f est différentiable en un point a de U, alors f est différentiable par rapport à chaque variable en a et :*

$$df_a : (h_1, \cdots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i).$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Soit $x \in E_i$. On pose $\tilde{x}_i = q_i(x) := (0, \cdots, 0, \underbrace{x}_{i}, 0, \cdots, 0)$. La différentiablilité de f en a permet d'écrire :

$$f(a + \tilde{x}_i) - f(a) - df_a(\tilde{x}_i) = \|\tilde{x}_i\|\varepsilon(\tilde{x}_i) = \|x\|\varepsilon \circ q_i(x).$$

$\tilde{x}_i \mapsto f(a + \tilde{x}_i)$ est donc différentiable en 0 et dérivée $df_a \circ q_i =: \partial_i f_a \in \mathcal{L}_c(E_i, F)$. Pour $h \in E$, on écrit :

$$h = \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i$$

et il vient par linéarité :

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} df_a(\tilde{h}_i).$$

■

Remarque 2.18. La réciproque est fausse en général. Considérer l'exemple :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0\,.$$

Proposition 2.19. *L'application f est C^1 sur U si et seulement si f est différentiable par rapport à chaque variable en tout point de U et si pour tout $i = 1, \cdots, n$, l'application $\partial_i f : x \mapsto \partial_i f_x$ de U dans $\mathcal{L}_c(E_i, F)$ est continue sur U.*

Démonstration. Supposons d'abord que f est C^1 sur U. Alors, f est différentiable par rapport à chaque variable (proposition précédente) et on a, sur E_i :

$$df_a \circ q_i = \partial_i f_a,$$

où $q_i : h_i \mapsto (0, \cdots, 0, \underbrace{h_i}_{i}, 0, \cdots, 0)$ est une application de $\mathcal{L}(E_i, E)$. La continuité par rapport à a en découle par composition.

Réciproquement, supposons que f est différentiable par rapport à chaque variable et de différentielles partielles continues sur U.

Soit $a \in U$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n)$ tel que : $\|h\| < \delta$, on a :

$$(a + h) \in U \quad \text{et} \quad \|\partial_i f_{a+h} - \partial_i f_a\| \leq \varepsilon.$$

On pose $h(0) = (0, \cdots, 0)$ et

$$h(k) = (h_1, h_2, \cdots, h_k, 0, \cdots, 0).$$

On a $h(n) = h$. On peut écrire la somme télescopique :

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(a + h(k-1) + \tilde{h}_k) - f(a + h(k-1)) \right),$$

où $\tilde{h}_k = (0, \cdots, 0, \underbrace{h_k}_{k}, 0, \cdots, 0)$.

On écrit alors :

$$f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \partial_k f_a(h_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(a + h(k-1) + \tilde{h}_k) - f(a + h(k-1)) - \partial_k f_a(h_k) \right).$$

On considère, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Phi(t) = f(a + h(k-1) + t\tilde{h}_k) - t\partial_k f_a(h_k)$$

et, par différentiation d'une composée, on observe que :

$$\Phi'(t) = df_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(\tilde{h}_k) - \partial_k f_a(h_k) = \partial_k f_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(h_k) - \partial_k f_a(h_k)\,.$$

Par continuité des différentielles partielles, on en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour $h \in E$ tel que $\|h\| < r$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|df_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(\tilde{h}_k) - \partial_k f_a(h_k)\| \leq \varepsilon \|h_k\|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, il s'ensuit que :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \partial_k f_a(h_k) \right\| \leq n\varepsilon \|h\|.$$

f est donc différentiable en a et de dérivée :

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^{n} \partial_i f_a(h_i).$$

Les $\partial_i f_a \circ p_i \in \mathcal{L}_c(E,F)$ sont des fonctions continues de a comme composées de fonctions continues. ■

Corollaire 2.20. *Supposons que $E = \mathbb{R}^m$. Si f est différentiable en $a = (a_1, \cdots, a_m) \in U$, alors f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x \to a_i, x \neq a_i} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_m) - f(a)}{x - a_i}.$$

La différentielle en a est donnée par :

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(a) h_i.$$

f est C^1 sur U si et seulement si ses dérivées partielles existent sur U et si les applications $a \mapsto \partial_{x_i} f(a)$ sont continues de U dans F.

2.3.2 Différentielles d'ordre deux

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$ une application. Rappelons que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel normé (pour la norme classique).

Définition 2.21. On dit que f est deux fois différentiable (ou deux fois dérivable) en a si f est différentiable sur un voisinage ouvert V de a contenu dans U, et si $df : V \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est différentiable en a et nous notons :

$$d^2 f_a = d(df)_a\,.$$

Remarque 2.22. L'application de $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ dans $\mathcal{L}_c^2(E,F)$ qui à u associe l'application bilinéaire continue $(x,y) \mapsto u(x)(y)$ est une application linéaire isométrique.

Si f est deux fois différentiable en a, nous noterons encore $d^2 f_a$ l'application bilinéaire associée.

Lemme 2.23. *Supposons que f soit deux fois différentiable en a. Soit $h' \in E$. Alors l'application $x \mapsto df_x(h')$ est différentiable en a de différentielle $h \mapsto d^2 f_a(h,h')$.*

Démonstration. On observe que $df_x(h') = ev_{h'} \circ df_x$. Par différentiation composée, il vient $d^2 f_a(h,h') = d(df(h'))_a(h)$. ■

Remarque 2.24. Si $E = \mathbb{R}^m$ et si f est deux fois différentiable en a, on a :

$$d^2 f_a(h,k) = \sum_{i,j} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Proposition 2.25 (Formule de Taylor à l'ordre deux)**.** *Si f est deux fois différentiable en a, on a :*

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) + o(\|h\|^2).$$

Démonstration. On considère

$$\Phi(t) = f(a+th) - f(a) - t\,df_a(h) - \frac{t^2}{2} d^2 f_a(h,h).$$

Par composition, Φ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\Phi'(t) = df_{a+th}(h) - df_a(h) - t d^2 f_a(h,h) = [df_{a+th} - df_a - d(df)_a(th)](h).$$

Puisque df est différentiable en a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $h' \in E$, si $\|h'\| < r$, alors

$$\|df_{a+h'} - df_a - d(df)_a(h')\| \leq \varepsilon \|h'\|.$$

Il s'ensuit que, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $h \in E$ tel que $\|h\| < r$,

$$\|\Phi'(t)\| \leq \varepsilon \|h\|^2.$$

Le résultat s'ensuit en appliquant l'inégalité des accroissements finis. ■

Proposition 2.26 (Symétrie de la différentielle seconde)**.** *Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $d^2 f_a$ est une application bilinéaire continue symétrique.*

Démonstration. Fixons $h, h' \in E$. On considère l'application de $[0,1] \to F$ définie par :

$$\Phi(t) = f(a+th+h') - f(a+th).$$

On a par dérivation des fonctions composées :

$$\Phi'(t) = df_{a+th+h'}(h) - df_{a+th}(h) = df_{a+th+h'}(h) - df_a(h) - (df_{a+th} - df_a)(h).$$

On remarque que :

$$\Phi'(t) - d^2 f_a(h',h) = (df_{a+th+h'} - df_a - d^2 f_a(th+h'))(h) - (df_{a+th} - df_a - d^2 f_a(th))(h).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que si $\|h\| < r/2$ et $\|h'\| < r/2$ on a :

$$\|df_{a+th+h'} - df_a - d^2 f_a(th+h')\| \leq \varepsilon \|th+h'\|, \quad \|df_{a+th} - df_a - d^2 f_a(th)\| \leq \varepsilon \|th\|.$$

Il vient alors :

$$\|\Phi'(t) - d^2 f_a(h',h)\| \leq 2\varepsilon \|h\|(\|h\| + \|h'\|) \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

L'inégalité des accroissements finis implique que :

$$\|\Phi(1) - \Phi(0) - d^2 f_a(h',h)\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

Comme $\Phi(1) - \Phi(0)$ est symétrique par rapport à h et h', on en déduit que :

$$\|\Phi(1) - \Phi(0) - d^2 f_a(h,h')\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

Ainsi, on a :

$$\|d^2 f_a(h,h') - d^2 f_a(h',h)\| \leq 4\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

Par homogénéité, cela est valable pour tous h et $h' \in E$ et la conclusion s'ensuit. ■

Corollaire 2.27. *Si $E = \mathbb{R}^m$ et si f est deux fois différentiable en a, on a :*

$$d^2 f_a(h,h) = \sum_{i=1}^{m} h_i^2 \partial_{x_i}^2 f(a) + 2\sum_{i<j} h_i h_j \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(a)\,.$$

Lorsque que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle matrice hessienne de f en a la matrice symétrique définie par :

$$\mathrm{Hess}_a(f) = \left(\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(a)\right)_{1\leq j\leq m\ ,\ 1\leq i\leq m}\,.$$

De plus, on a

$$d^2 f_a(h,h) = H^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Hess}_a(f) H\,.$$

2.4 Problèmes d'extrema

Dans cette section, on se place en dimension finie.

2.4.1 Rappels sur les formes quadratiques

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit Q une forme quadratique sur E et B la forme bilinéaire symétrique associée. On a :

$$Q(x) = B(x,x), \quad B(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}\,.$$

Le noyau de B est défini par

$$E^{\perp} = \{x \in E \,:\, \forall y \in E, B(x,y) = 0\}\,.$$

On dit que Q ou B est non dégénérée si $E^{\perp} = \{0\}$.

On dit qu'une forme Q est définie positive (et on écrit $Q > 0$) si $Q(x) > 0$ pour $x \neq 0$. On définit de même la notion de définie négative.

Si $(e_1, \cdots, e_m)$ est une base de E. La matrice associée à B est la matrice symétrique :

$$M = (B(e_i, e_j))\,.$$

et on a $B(x,y) = Y^{\mathrm{T}} M X$.

On rappelle qu'il existe une base orthonormée pour le produit scalaire canonique dans laquelle l'application linéaire associée à M est diagonale :

$$P^{-1} M P = D, \quad P^{-1} = P^{\mathrm{T}}\,.$$

Théorème 2.28. *Soit Q une forme quadratique sur E (de dimension m). Soit $p \in \mathbb{N}$ la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie positive. Soit q la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie négative. Soit r la dimension du noyau de Q. Alors, on a : $p + q + r = m$ et il existe une base de E dans laquelle la forme quadratique prend la forme :*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

Le triplet (p,q,r) s'appelle la signature de Q. p correspond au nombre de valeurs propres positives d'une matrice de Q dans n'importe quelle base, q au nombre de valeurs propres négatives.

2.4.2 Extrema locaux

Soit $U \subset E$ un ouvert de E (de dimension finie).
Soit $H : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

Définition 2.29. Un point $a \in U$ est un maximum (resp. minimum) local de H s'il existe un voisinage V de a sur lequel on a :

$$H(x) \leq H(a) \quad \text{resp.} \quad H(x) \geq H(a)\,.$$

On définit de même la notion de maximum et de minimum local strict (avec des inégalités strictes pour $x \neq a$).

Définition 2.30. Quand H est différentiable en a, on dit que a est un point critique si et seulement si $dH_a = 0$.

Lemme 2.31. *Supposons que H est différentialble en a et que a est un extremum local de H. Alors a est un point critique de H.*

Voici une condition nécessaire pour avoir des extrema locaux.

Proposition 2.32. *Supposons que H est deux fois différentiable en a et que a est un extremum local de H. Alors a est un point critique de H et si a est un minimum local (resp. maximum local), on a $d^2H_a \geq 0$ (resp. $d^2H_a \leq 0$).*

Démonstration. On suppose que a est un minimum local de H. On a donc $dH_a = 0$. De plus, par la formule de Taylor, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}d^2H_a(h,h) + o(\|h\|^2)\,.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $h \in B(0,r)$,

$$\left| f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}d^2H_a(h,h) \right| \leq \varepsilon\|h\|^2\,.$$

Ainsi,

$$-\varepsilon\|h\|^2 \leq f(a+h) - f(a) - \varepsilon\|h\|^2 \leq \frac{1}{2}d^2H_a(h,h)\,.$$

Par homogénéité, on en tire que, pour tout $h \in E$,

$$-\varepsilon\|h\|^2 \leq \frac{1}{2}d^2H_a(h,h)\,.$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 et la conclusion s'ensuit. ■

Voici une condition suffisante pour avoir des extrema locaux.

Proposition 2.33. *Supposons que H est deux fois différentiable en a et que $dH_a = 0$. Si $d^2H_a > 0$ (resp. $d^2H_a < 0$), alors a est un minimum local strict (resp. maximum local strict).*

Démonstration. Supposons que d^2H_a est définie positive. Cela implique notamment que, pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| = 1$, on a

$$d^2H_a(h,h) > 0\,.$$

Or, $\lambda := \inf_{\|h\|=1} d^2H_a(h,h)$ est atteint par continuité sur un compact. Ainsi, $\lambda > 0$ et on a, pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| = 1$,

$$d^2H_a(h,h) \geq \lambda\,.$$

Par homogénéité, on en tire que, pour tout $h \in E$,

$$d^2H_a(h,h) \geq \lambda\|h\|^2\,.$$

Par ailleurs, grâce à la formule de Taylor, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $h \in B(0,r)$,

$$\left| f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}d^2H_a(h,h) \right| \leq \varepsilon\|h\|^2\,.$$

Ainsi, on a

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} d^2 H_a(h,h) - \varepsilon \|h\|^2 \geq \left(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon\right) \|h\|^2 .$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{\lambda}{4}$, on voit que a est un minimum local strict. ∎

Énonçons d'ores et déjà le célèbre théorème des extrema liés dont la preuve utilise le théorème d'inversion locale d'une prochaine section. Il s'agit d'un théorème permettant de résoudre des problèmes d'optimisation *sous contraintes*.

Théorème 2.34. *Soient $H, f_1, \cdots, f_p$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $a \in U$. Considérons :*

$$X = \{x \in U \,:\, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\} .$$

Supposons que les formes $((df_j)_a)_{1 \leq j \leq p}$ sont indépendantes et que a soit un extremum local de H sur X. Alors, les formes $dH_a, (df_1)_a, \cdots, (df_p)_a$ sont liées.

2.5 Différentielles d'ordre supérieur

Définition 2.35. On dit que $f : U \to F$ est k fois différentiable en a si df est $k-1$ fois différentiable en tout point x d'un voisinage de a et que $x \mapsto d^{k-1} f_x$ est différentiable en a.

Proposition 2.36. *Si f est k fois différentiable en a, alors on a :*

$$d^k f_a(h_1, \cdots, h_k) = d(d^{k-1} f)_a(h_2, \cdots, h_k)(h_1) = d^2(d^{k-2} f)_a(h_3, \cdots, h_k)(h_2, h_1) = \cdots .$$

On définit les applications de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geq 2$.

Définition 2.37. Soient E, F des evn et U un ouvert de E. Soit f une application de U dans F. Soit $k \geq 2$. On dit que f est $\mathcal{C}^k$ sur U si f est $\mathcal{C}^1$ sur U et si $df : U \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

Définition 2.38. On dit que $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U pour tout $k \geq 1$.

Remarque 2.39. On rappelle que $\mathcal{L}_c^k(E, F)$ désigne l'espace vectoriel des applications k-linéaires continues de E^k dans F. On a une identification canonique entre $\mathcal{L}_c^k(E, F)$ avec $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c^{k-1}(E, F))$.

Pour une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on peut donc considérer $d_a^k f$ comme un élément de $\mathcal{L}_c^k(E, F)$.

Proposition 2.40. *Si f est k fois différentiable en a, alors $d^k f_a$ est une application k-linéaire symétrique.*

Démonstration. Pour $k = 2$, le résultat est déjà prouvé. On raisonne par récurrence. Soit $k \geq 2$. Pour $(h_1, \cdots, h_{k+1})$, on a :

$$d^{k+1} f_a(h_1, \cdots, h_{k+1}) = d\left(d^k f(h_2, \cdots, h_{k+1})\right)_a (h_1) = d^2\left(d^{k-1} f(h_3, \cdots, h_{k+1})\right)_a (h_2, h_1).$$

Par récurrence, on en déduit la symétrie par rapport à $(h_2, \cdots, h_{k+1})$ et par rapport à (h_2, h_1). On en conclut la symétrie par rapport à toutes les transpositions et le résultat en découle. ∎

Proposition 2.41. *On a :*

1. *L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *Les applications affines continues sont $\mathcal{C}^\infty$.*
3. *Les applications bilinéaires continues sont $\mathcal{C}^\infty$. Les applications multilinéaires continues sont aussi $\mathcal{C}^\infty$.*
4. *La composée (bien définie) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est encore de classe $\mathcal{C}^k$.*
5. *Le produit d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est encore $\mathcal{C}^k$ sur U.*
6. *L'application $\mathcal{GL}_c(E, F) \to \mathcal{GL}_c(F, E) : u \mapsto u^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.*

7. *Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme et que $f \in C^k(U)$, alors $f^{-1} \in C^k(V)$.*

Démonstration. Le point (1) est trivial. Pour le point (2), on écrit :

$$f(x) = b + u(x), \text{ avec } u \in \mathcal{L}(E, F), b \in F.$$

Un calcul élémentaire fournit : $df_x = u$ et ainsi $d^2 f = 0$.

Passons au point (4). Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. On a vu que :

$$dB_{(x_1,x_2)}(h_1, h_2) = B(x_1, h_2) + B(h_1, x_2).$$

On remarque que $(x_1, x_2) \mapsto dB_{(x_1,x_2)} \in \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire. Il s'agit de montrer sa continuité, c'est-à-dire :

$$\big((x_1, x_2) \mapsto B(x_1, p_2(\cdot))\big) \in \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)).$$

Cela provient de l'estimation :

$$\sup_{\|x_1\|\leq 1, \|x_2\|\leq 1} \|B(x_1, p_2(\cdot))\|_{\mathcal{L}_c(E_1\times E_2, F)} \leq \|B\| < +\infty.$$

On en déduit que :

$$d(dB)_{(x_1,x_2)}(k_1, k_2) = B(k_1, \cdot) + B(\cdot, k_2).$$

et alors : $d^3 B = 0$.

On traite le point (4). Soit G un evn. Soit $f : U \to V$ et $g : V \to G$ deux applications C^k. $g \circ f$ est C^1 et on a :

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Par hypothèse de récurrence $x \mapsto dg_{f(x)}$ est de classe C^{k-1}, de plus df est de classe C^{k-1}. Le résultat en découle par récurrence.

Concernant le point (5), il suffit de considérer l'application bilinéaire produit et la formule de composition.

Intéressons-nous au point (6). On a déjà vu que cette application est C^1. Par composition d'une application bilinéaire continue (donc C^∞) et d'applications C^1, on en conclut que $u \mapsto d\varphi_u$ est C^2 et le résultat s'ensuit par récurrence.

Pour le point (7), on rappelle que :

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}.$$

Une simple combinaison du théorème de composition et du point (6) donne le résultat. ■

Proposition 2.42. *$f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est C^k si et seulement si les différentielles partielles de f existent jusqu'à l'ordre k et sont continues.*

Théorème 2.43 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit U un ouvert non vide de E et a_0, a_1 deux points de U tels que $a_t = (1-t)a_0 + ta_1 \in U$ pour $t \in [0, 1]$. On pose $v = a_1 - a_0$.*

Si $f : U \to F$ est de classe C^k sur U, alors on a :

$$\begin{aligned} f(a_1) =& f(a_0) + df_{a_0}(v) + \frac{1}{2!}d^2 f_{a_0}(v, v) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1} f_{a_0}(v, \cdots, v) \\ &+ \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} d^k f_{a_t}(v, \cdots, v)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Démonstration. En raisonnant composante par composante, on peut supposer que $F = \mathbb{R}$. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $h(t) = f(a_0 + tv)$. h est C^k par composition et :

$$h^{(l)}(t) = d^l f_{a_t}(v, \cdots, v), \quad \forall l \in \{1, \cdots, k\}.$$

La formule de Taylor usuelle donne la conclusion. ■

2.6 Exercices

Exercice 1. Soient a et b des réels. Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

$$f_a(x) = \begin{cases} xe^{-a/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

et

$$g_b(x) = \begin{cases} |x| \cos(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|_2^2}.$$

Calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 3. Étudier la continuité, l'existence des dérivées directionnelles et la différentiabilité des fonctions suivantes en $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} \sin \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$h_{a,b}(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2+y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases},$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 3x^2 y + e^{xz^2} + 4z^3$. Quelle est la différentielle de f ? Donner sa matrice jacobienne et son gradient.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \neq y, \\ f'(x) & x = y \end{cases}.$$

Montrer que g est $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients réels. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Soit $q \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_q[X]$ et $F = \mathbb{R}_{3q}[X]$. On considère l'application $\phi : E \to F : \phi(P) = P^3$.

1. Montrer que N est une norme et qu'elle vérifie :

$$N(PQ) \leq N(P)N(Q), \quad P, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

2. Montrer que N est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $P \in E$. Montrer que ϕ est C^1.

3. Quand $q = 1$ donner la matrice jacobienne de ϕ dans les bases canoniques.

Exercice 7 (Algorithme pour approcher l'inverse d'une matrice)**.** Soit E l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$ muni d'une norme telle que $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$. Soit $A \in E$ inversible. Pour $X \in E$, on pose :

$$F(X) = 2X - XAX.$$

1. Montrer que $F : E \to E$ est C^1. Calculer $F(A^{-1})$ et $dF_{A^{-1}}$.

2. On pose $X_{p+1} = F(X_p)$, $p \geq 0$. Montrer que X_p converge vers A^{-1} dès que X_0 est dans une boule convenable.

3. Résoudre la relation de récurrence en posant $Y_p = \mathrm{Id} - AX_p$. Que dire de la convergence de X_p ?

Exercice 8 (Gradient et lignes de niveaux)**.** Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère $c \in \mathbb{R}$ et on pose

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(x) = c\} \, .$$

On considère une fonction dérivable $I \ni s \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer la dérivée de $f \circ \gamma$.

2. Si γ est à valeurs dans S, que dire des vecteurs $\nabla f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$? Représenter cette propriété sur un dessin.

Exercice 9 (Différentielle du déterminant)**.** Soit E l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$.

1. Montrer que $\det \, : \, E \to \mathbb{R}$ est différentiable en Id et donner l'expression de sa différentielle.

2. Le déterminant est-il une application C^1 sur E ?

3. Montrer que pour tout $X, H \in E$, on a :

$$d(\det)_X(H) = \mathrm{Tr}(\overline{X}^{\mathrm{T}} H) \, ,$$

   où $\overline{X}$ est la comatrice de X.

4. Soient $y_1, \cdots, y_p$ des solutions C^1 (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) du système différentiel linéaire $y'(t) = A(t)y(t)$, où A est continue sur I à valeurs dans E. Déterminer une équation différentielle satisfaite par $w(t) = \det(y_1(t), \cdots, y_n(t))$.

Exercice 10 (Identité de l'arctangente)**.** Soit $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, xy \neq 1\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) .$$

Montrer que f est C^1 et calculer sa différentielle. Conclure.

Exercice 11 (Équation de transport)**.** Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$c\partial_x f(x, t) + \partial_t f(x, t) = 0 \, .$$

Indice : Si f est une telle fonction, considérer $g(x, t) = f(x + ct, t)$.

Exercice 12. Soient E et F des evn. Soit $f \in C^1(E, F)$. Montrer que f est k-lipschitzienne si et seulement si pour tout $a \in A$, on a : $\|df_a\| \leq k$.

Exercice 13. Soient E et F des evn. Soit U un ouvert de E et une suite d'applications $f_k \, : \, U \to F$ différentiables. On suppose que les f_k convergent simplement vers f sur U et que les df_k convergent uniformément sur U.

Montrer que f est différentiable sur U et donner sa différentielle. Si de plus les f_k sont C^1, montrer que f l'est aussi.

Indice : Appliquer l'inégalité de accroissements finis à $f_m - f_n$ entre a et $a + h$.

Exercice 14. Soit E l'espace des matrices carrées de taille n. Que dire de la régularité de $X \mapsto X^p$ pour $p \geq 1$? Si c'est possible, calculer sa différentielle et sa différentielle seconde.

Exercice 15 (Différentiabilité de l'exponentielle matricielle)**.** Soit E l'espace des matrices carrées de taille n. On pose, pour $k \geq 0$ et $X \in E$:

$$f_k(X) = \sum_{p=0}^{k} \frac{X^p}{p!}.$$

En utilisant la suite f_k, montrer que exp est C^1.

Exercice 16 (Un exemple de calcul de différentielle en dimension infinie)**.** Soient $I = [0,1]$, $F = C^0(I,\mathbb{R})$, $E \subset F$ le sous-espace des fonctions C^1 nulles en 0. On munit F de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et E de la norme $\|x\|_1 = \|x'\|_\infty$. Montrer que $f : E \to F$ définie par $f(x) = x' + x^2$ est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle.

Exercice 17 (Calculs de Laplaciens)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in C^2(U,\mathbb{R})$, on pose :

$$\Delta f = \partial_{x_1}^2 f + \cdots + \partial_{x_n}^2 f.$$

1. Donner une expression pour $\Delta(fg)$.
2. Calculer Δf pour $f(x,y) = (\cos x - \sin x)e^y$.
3. On pose $g_n(x) = \ln\|x\|_2$ pour $n = 2$ et $g_n(x) = \|x\|_2^{2-n}$ pour $n \geq 3$; calculer Δg_n.

Exercice 18. Pour $f \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $A \in O(n)$, montrer que $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$.

Exercice 19 (Une équation de Schrödinger)**.** Trouver un nombre $\lambda > 0$ et une fonction non nulle $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tels que

$$-\Delta u(x) - \frac{u(x)}{\|x\|_2} = \lambda u(x)\,.$$

Indice : On pourra chercher une telle fonction sous la forme $u(x) = f(\|x\|_2)$ et exprimer Δu en fonction des dérivées de f.

Exercice 20 (Équation des ondes)**.** Trouver les applications $F \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Exercice 21. Étudier la nature des points critiques des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 e^x$,
2. $g(x,y,z) = xy + xz + yz$,
3. $h(x,y,z) = (x+y)^2 + \sin(xz) + \frac{z^2}{2}$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(u) = (u-1)^2(u+1), \quad \phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz\,.$$

On pose $F = f \circ \phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que ϕ est une forme quadratique définie positive.
2. Montrer que a est un point critique de F si et seulement si $a = (0,0,0)$ ou $\phi(a) = 1$.
3. Calculer la hessienne de F en $(0,0,0)$. Quelle est la nature de ce point critique ?
4. Montrer que F est positive. Que dire des points critiques différents de $(0,0,0)$?

Exercice 23 (Existence de valeurs propres)**.** Soit A une matrice carrée symétrique réelle de taille n. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2},$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Comparer $\langle Ax, y\rangle$ et $\langle x, Ay\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'infimum $\inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)$ est atteint en un point x_0 de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que A possède une valeur propre réelle.

Exercice 24 (Fonctions surharmoniques)**.** Soit U un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^2$. On considère $u \in C^2(U, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{U}, \mathbb{R})$ telle que $\Delta u(x) > 0$ pour tout $x \in U$. Montrer que u admet un maximum sur $\overline{U}$ et que ce dernier n'est pas atteint sur U.

Exercice 25. Trouver les extrema de $f(x, y) = xy$ sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26. On considère la fonction $g \ :]0, +\infty[^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x, y, z) = xyz - 32$. On pose $S = \{(x, y, z) \in]0, +\infty[^3 : g(x, y, z) = 0\}$ et $f(x, y, z) = xy + 2yz + 3xz$.

1. Montrer que $f_{|S}$ possède un minimum (qu'on note m).
2. Déterminer m.

Exercice 27. Trouver les extrema de $f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$ sur l'intersection du plan $x + z = 1$ et de $C = \{x^2 + y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 28 (Distance d'un point à une ellipse)**.** Soient λ_1 et λ_2 deux nombres strictement positifs. On considère l'ellipse donnée par

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \leq 1\},$$

et un point $A \notin C$ de coordonnées (a_1, a_2). Exprimer la distance entre A et C en fonctions des λ_j et a_j.

Indice : On pourra commencer par montrer que cette distance est atteinte et que les coordonnées (m_1, m_2) d'un point qui réalise cette distance vérifient $\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 = 1$.

3 Inversion locale et fonctions implicites

3.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 3.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit U un ouvert non vide de E et $f : U \to F$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que $df_a \in \mathcal{GL}(E,F)$.*

Alors, il existe un ouvert U_1 de U contenant a et un ouvert V_1 de F contenant $b := f(a)$ tels que $f : U_1 \to V_1$ soit un C^1-difféomorphisme.

3.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 3.2. *Soient E, F, G trois espaces de Banach et U un ouvert de $E\times F$ et $f : U \to G$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et que $\partial_2 f(a,b) : F \to G$ est bijective.*

Alors il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant (a,b), un ouvert $V \subset E$ contenant a et une application $g : V \to F$ de classe C^1 tels que :

$$(x,y) \in U' \text{ et } f(x,y) = 0$$

équivaut à :

$$x \in V \text{ et } y = g(x).$$

En particulier, on a : $g(a) = b$ et pour $x \in V$, on a la formule :

$$dg_x = -(\partial_2 f_{(x,g(x))})^{-1} \circ \partial_1 f_{(x,g(x))}.$$

Démonstration. On va appliquer le théorème d'inversion locale. On définit $\varphi : U \to E\times G$ par $\varphi(x,y) = (x, f(x,y))$. φ est de classe C^1. Sa différentielle au point (a,b) est donnée pour $(h,k) \in E \times F$ par :

$$d\varphi_{(a,b)}(h,k) = (h, \partial_1 f_{(a,b)}(h) + \partial_2 f_{(a,b)}(k)).$$

En écrivant $(h',k') = (h, \partial_1 f_{(a,b)}(h) + \partial_2 f_{(a,b)}(k))$, on est amené à :

$$h = h', \quad k = (\partial_2 f_{(a,b)})^{-1}(k' - \partial_1 f_{(a,b)}(h')).$$

$d\varphi_{(a,b)}$ est donc inversible d'inverse (continu) défini pour $(h',k') \in E \times G$:

$$(d\varphi_{(a,b)})^{-1}(h',k') = (h', (\partial_2 f_{(a,b)})^{-1}(k' - \partial_1 f_{(a,b)}(h'))).$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe donc un ouvert $U' \subset U \subset E \times F$ contenant (a,b) et un ouvert $U'' \subset E \times G$ contenant $(a,0)$ tels que $\varphi : U' \to U''$ soit un C^1-difféomorphisme. Notons ψ son inverse. ψ est de la forme $(x,z) \mapsto (x, \psi_2(x,z))$.

On définit l'ensemble $V = \{x \in E : (x,0) \in U''\}$ qui est un ouvert de E (image réciproque de l'ouvert U'' par une fonction continue). Les assertions

$$(x,y) \in U' \text{ et } f(x,y) = 0,$$

$$(x,0) \in U'' \text{ et } (x,y) = \psi(x,0) = (x, \psi_2(x,0)),$$

$$x \in V \text{ et } y = g(x) := \psi_2(x,0)$$

sont équivalentes.

Pour la formule, on écrit, pour $x \in V$:

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Les fonctions étant C^1, on obtient par dérivation des fonctions composées :

$$\partial_1 f_{(x,f(x))} + \partial_2 f_{(x,g(x))} \circ dg_x = 0.$$

■

Remarque 3.3. Dans les théorèmes, on peut remplacer C^1 par C^k, $k \geq 1$. La vérification est élémentaire.

3.3 Applications à la géométrie

3.3.1 Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Présentons quelques considérations liées à la géométrie locale des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert non vide $\mathbb{R}^3$. On considère :

$$S = \{x \in U \,:\, H(x) = 0\}.$$

Soit $a \in S$ tel que $dH_a \neq 0$.

On peut supposer par exemple que $\partial_3 H(a) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V contenant (a_1, a_2), un ouvert W contenant a_3 et une application C^1, $\phi \,:\, V \to W$, tels que :

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x \in V \times W$$

soit équivalent à :

$$x_3 = \phi(x_1, x_2), \quad x_3 \in W, (x_1, x_2) \in V.$$

On pose :

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)).$$

Proposition 3.4. *On a* $\ker(dH_a) = \mathrm{Im}(d\Phi_{(a_1,a_2)})$.

Démonstration. On écrit $H(\Phi(x)) = 0$. En dérivant, il vient :

$$dH_a(d\Phi_{(a_1,a_2)}) = 0\,.$$

L'image est donc incluse dans le noyau. L'égalité des dimensions fournit l'égalité des espaces. ■

Cet espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel tangent à S en a.

3.3.2 Théorème des extrema liés

Théorème 3.5. *Soient $H, f_1, \cdots, f_p$ des fonctions C^1 sur U. Soit $a \in U$. Considérons :*

$$X = \{x \in U \,:\, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}.$$

Supposons que les formes $(df_j)_a$ sont indépendantes et que a soit un extremum local de H sur X. Alors, les formes $dH_a, (df_1)_a, \cdots, (df_p)_a$ sont liées.

Démonstration. Nous allons donner une nouvelle représentation de M au voisinage de a. Par commodité, on suppose que $a = 0$. Les formes $(df_j)_a$ sont indépendantes, on peut donc les compléter en une base : $((df_1)_a, \cdots, (df_p)_a, g_{p+1}, \cdots, g_m)$.

Cela invite à introduire l'application de $U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ définie par :

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x)), g_{p+1}(x), \cdots, g_m(x)).$$

Par un calcul évident, on a : $dF_a = ((df_1)_a, \cdots, (df_p)_a, g_{p+1}, \cdots, g_m)$ qui est inversible. Le théorème d'inversion locale s'applique. Il existe un voisinage ouvert V contenant a et un voisinage ouvert W de $F(a)$ tels que $F \,:\, V \to W$ soit un C^1-difféomorphisme. Considérons $\tilde{W}$ l'ensemble des $y_{p+1}, \cdots, y_m$ vérifiant $(0, \cdots, 0, y_{p+1}, \cdots, y_m)$. $\tilde{W}$ est un ouvert qui contient $(0, \cdots, 0)$.

On pose :

$$\phi(y_{p+1}, \ldots, y_m) = F^{-1}(0, \cdots, 0, y_{p+1}, \cdots, y_m) \in M \cap V, \quad (y_{p+1}, \ldots, y_m) \in \tilde{W}.$$

ϕ est une bijection C^1. On considère maintenant :

$$\tilde{H}(y_{p+1}, \ldots, y_m) := H(\phi(y_{p+1}, \ldots, y_m)).$$

Par hypothèse, $\tilde{H}$ admet un extremum local en $(0, \cdots, 0)$. Cela se traduit par :

$$d_a H \circ d_{(0,\cdots,0)}\phi = 0.$$

Il s'agit de caractériser l'image de $d_{(0,\cdots,0)}\phi$. Un calcul très simple fournit, pour $v \in \mathbb{R}^{m-p}$:

$$d_{(0,\cdots,0)}\phi(v) = (dF^{-1})_{(0,\cdots,0)}(0,\cdots,0,v)$$

ou encore, de façon équivalente :

$$(dF)_{(0,\cdots,0)}(d_{(0,\cdots,0)}\phi(v)) = (0,\cdots,0,v).$$

Autrement dit w est dans l'image de $d_{(0,\cdots,0)}\phi$ si et seulement s'il appartient à tous les noyaux des $(df_i)_a$. On a donc montré que :

$$d_aH = 0 \text{ sur } \cap_{i=1}^{p} \ker((df_i)_a).$$

C'est alors un résultat classique d'algèbre linéaire qui permet de conclure (compléter cet ensemble de formes linéaires en une base et introduire la base antéduale). ■

3.4 Exercices

Exercice 1. Montrer que l'application $\Phi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^∞-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$ où D est le demi-axe des réels négatifs. Si $f(x,y) = g(r,\theta)$, donner les relations entre les dérivées partielles de f et celles de g.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que df_a soit inversible pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Montrer que f est ouverte, puis que f est propre, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact est compact. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé et que f est surjective.

Exercice 3. On note $\langle x,y\rangle$ le produit scalaire canonique de x et y dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que :

$$\langle f(x) - f(y), x-y\rangle \geq \|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n .$$

Montrer que cette inégalité est équivalente à :

$$\langle df_a(u), u\rangle \geq \|u\|^2, \quad \forall a,u \in \mathbb{R}^n .$$

Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé et ouvert. En déduire que f est un C^1-difféomorphisme d'inverse lipschitzien.

Exercice 4. Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(\lambda,x,y) = (u,v) = (\lambda + \lambda x - y - x^3, x + \lambda y - y^3)$.

1. Montrer que l'équation $\Phi(\lambda,x,y) = 0$ permet de définir au voisinage de $(0,0,0)$ deux fonctions $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ de classe C^1 sur un intervalle $]-\delta,\delta[$.
2. On pose : $h(\lambda,x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\lambda,x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(\lambda,x,y)$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en $(0,0,0)$.
3. On pose $H(\lambda) = h(\lambda, x(\lambda), y(\lambda))$. Quel est le signe de $H(\lambda)$ pour λ petit ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,u,v) \mapsto (xe^{u^2-v^2} - y\sin v, y^2\cos u + x\sin v)$ et soit $p_0 = (0,1,\pi/2,0)$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ tels que $(0,1) \in U$ et $(\pi/2,0) \in V$ et $g : U \to V$ tels que :

$$f(x,y,g(x,y)) = 0, \qquad \text{pour } (x,y) \in U.$$

Calculer $dg_{(0,1)}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z + \sin(yz) + x^2e^y$. On pose $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$.

1. Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit un voisinage de $(0,0,0)$ et une fonction $z = \phi(x,y)$ de classe C^∞.
2. Donner l'équation du plan tangent à S en $(0,0,0)$.
3. Donner le développement de Taylor d'ordre 2 de ϕ en $(0,0)$.
4. Décrire la position de S par rapport à son plan tangent en $(0,0,0)$.

Exercice 7. On considère :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t &= 2 \\ x + y + z + t &= 0 \end{cases} .$$

Vérifer que $(0,-1,1,0)$ est une solution. Montrer que ce système détermine un voisinage de $t = 0$ et trois fonctions $t \mapsto x(t), t \mapsto y(t), t \mapsto z(t)$ de classe C^∞ telles que $x(0) = 0, y(0) = -1, z(0) = 1$. Calculer la dérivée de $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$.

Exercice 8. Sur quels ouverts de $\mathbb{R}^2$, les applications suivantes sont-elles des difféomorphismes locaux ?

$$z \mapsto e^z, \quad z \mapsto z^2.$$

Exercice 9. On note E l'espace des matrices réelles de taille n et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$, inversible. Soit $\phi : E \to S$ définie par :

$$\phi(M) = {}^t M A_0 M.$$

1. Montrer que $d\phi_{\mathrm{Id}}$ est surjective. Donner son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 et une application $A \mapsto M$ de V à valeurs dans les matrices inversibles telle que :
$$A = {}^t M A_0 M.$$
On pourra introduire l'ensemble F des $M \in E$ telles que $A_0 M \in S$ et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de ϕ à F.

Exercice 10 (Lemme de Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur U ouvert contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de f, c'est à dire : $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ est une forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p, 0)$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, montrer qu'il existe un C^1-difféomorphisme ϕ entre deux voisinages de l'origine tel que $\phi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2,$$

où $\phi(x) = u$.

4 Espaces de Banach

4.1 Suites de Cauchy

Définition 4.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ d'éléments de E est de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0,\ p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 4.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.*
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
1. *$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E,*
2. *$(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E,*
3. *$(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.*

Proposition 4.3. *Une suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 4.4. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Lemme 4.5. *Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.*

4.2 Complétude

Définition 4.6. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
On dit que A est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.

Proposition 4.7. *Montrer qu'une partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée*

Proposition 4.8. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset B \subset E$.*
On suppose que A est fermé et que B est complet. Alors A est complet.

Proposition 4.9. *Une partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète.*

Définition 4.10. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

Proposition 4.11. *Un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemple 4.12. L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^d$ équipé de n'importe quelle norme est un espace de Banach.

Proposition 4.13. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset E$. Alors A est fermé si et seulement si A est complet.*

4.3 Complétude des espaces de fonctions continues : exemples fondamentaux

Commençons par une première proposition dans le cas des applications linéaires.

Proposition 4.14. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet.*

Le théorème suivant est beaucoup plus difficile à démontrer et nous l'admettrons. Il dit que l'inverse d'une application linéaire bijective entre deux espaces de Banach est encore continue. Lorsque les espaces E et F sont de dimension finie, ce résultat est très facile à établir puisqu'en dimension finie toute application linéaire est continue. En général, c'est une autre histoire...

Théorème 4.15 (Isomorphismes de Banach)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}_c(F, E)$.*

Proposition 4.16. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et supposons que $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet. Soit $A \subset E$ et considérons l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans F et bornées qu'on note $C_b^0(A, F)$. On munit $C_b^0(A, F)$ de la norme uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} \|f(a)\|_F\,.$$

Alors, $(C_b^0(A, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration. On laisse au lecteur ou la lectrice le soin de vérifier que nous avons bien à faire à un espace vectoriel normé. Montrons que cet espace est complet. Pour cela, prenons une suite de Cauchy (f_n). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a, pour tout $a \in A$,

$$\|f_m(a) - f_n(a)\|_F \leq \epsilon\,.$$

On tire donc que, pour tout $a \in A$, la suite $(f_n(a))$ est de Cauchy dans F. Elle converge donc vers un certain $f(a) \in F$.

Il faut vérifier que la fonction ainsi définie $f : A \to F$ est continue et bornée.

Prenons $\epsilon = 1$ and faisons tendre n vers l'infini. On en déduit que, pour tout $a \in A$,

$$\|f_m(a) - f(a)\|_F \leq 1\,.$$

Par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|f(a)\|_F \leq 1 + \|f_m\|_\infty\,.$$

Comme (f_m) est de Cauchy, elle est bornée. On en déduit que f est bornée. Par ailleurs, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $a \in A$ et tout $m \geq N$,

$$\|f_m(a) - f(a)\|_F \leq \epsilon\,.$$

Montrons à présent la continuité de f. Soit $a_0 \in A$. On a

$$\|f(a) - f(a_0)\|_F \leq \|f(a) - f_N(a)\|_F + \|f_N(a) - f_N(a_0)\|_F + \|f_N(a_0) - f(a_0)\|_F\,,$$

si bien que

$$\|f(a) - f(a_0)\|_F \leq 2\epsilon + \|f_N(a) - f_N(a_0)\|_F\,.$$

Par continuité de f_N en a_0, on en déduit qu'il existe une boule ouverte $B(a_0, r)$ telle que, pour tout $a \in B(a_0, r) \cap A$, $\|f_N(a) - f_N(a_0)\|_F \leq \epsilon$.

On en déduit que f est continue en a_0 pour tout $a_0 \in A$.

Comme on a établi que $\|f_m - f\|_\infty \leq \epsilon$, on a bien montré que (f_m) converge vers un élément de $C_b^0(A, F)$ au sens de la norme uniforme.

■

Exemple 4.17. Pour $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\|f\| \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. De plus, $\left(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$ est un espace de Banach.

Remarque 4.18. La proposition précédente a déjà été rencontrée implicitement dans le cours sur les suites et séries de fonctions où l'on apprend, entre autres choses, que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est encore continue (en utilisant le fameux "critère de Cauchy").

4.4 Théorème du point fixe de Banach–Picard et application

4.4.1 Énoncé du théorème

Définition 4.19. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $F \subset E$ une partie fermée.
On dit que $f : F \to F$ est une fonction contractante si elle est lipschtzienne de constante $q \in [0, 1[$, autrement dit s'il existe $q \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in F$, $\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$.

Théorème 4.20 (Théorème du point fixe de Banach–Picard)**.**
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $F \subset E$ une partie fermée. Alors toute fonction contractante $f : F \to F$ admet un unique point fixe.

4.4.2 Une application fondamentale du théorème de Banach-Picard

Théorème 4.21. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit U un ouvert non vide de E et $f : U \to F$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que $df_a \in \mathcal{GL}_c(E,F)$.*

Alors, il existe un ouvert U_1 de U contenant a et un ouvert V_1 de F contenant $b := f(a)$ tels que $f : U_1 \to V_1$ soit un C^1-difféomorphisme.

Démonstration. En vertu du Théorème 4.15, on sait que $(df_a)^{-1}$ est continue et on pose

$$M = \|(df_a)^{-1}\| > 0 .$$

Considérons $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ à déterminer.

Pour $y \in B(b, r_2)$ et $x \in B_f(a, r_1)$, nous devons examiner l'équation

$$y = f(x) .$$

Cette équation peut aussi s'écrire :

$$y - f(a) - df_a(x-a) = \varphi(x) ,$$

où

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - df_a(x-a) .$$

Autrement dit, l'équation $y = f(x)$ est équivalente à

$$x = a + (df_a)^{-1}(y - f(a) - \varphi(x)) =: F_y(x) .$$

Il s'agit d'un problème de point fixe. Noter que, si φ était identiquement nulle (c'est-à-dire si f est affine), F_y serait constante et ne posséderait en effet qu'un seul point fixe $a + (df_a)^{-1}(y - f(a))$.

Point fixe On observe que $\varphi(a) = 0$ et que $d\varphi_a = 0$. Par continuité, il existe $r_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in B_f(a, r_1)$,

$$\|d\varphi_x\| \leq \frac{1}{2M} .$$

On peut même choisir ce r_1 de sorte que $B(a, r_1) \subset U$ et que df_x est inversible pour tout $x \in B_f(a, r_1)$.

L'inégalité des accroissements finis fournit alors pour tout $x, \tilde{x} \in B_f(a, r_1)$,

$$\|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2M}\|x - \tilde{x}\| .$$

En particulier,

$$\|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2M}\|x - a\| \leq \frac{r_1}{2M} .$$

On en déduit que, pour tout $y \in B(b, r_2)$ et tout $x \in B_f(a, r_1)$,

$$\|F_y(x) - a\| < M(r_2 + \frac{r_1}{2M}) .$$

Cela conduit à choisir $r_2 = \frac{r_1}{2M}$ et de la sorte, on tire

$$\|F_y(x) - a\| < r_1 .$$

Autrement dit, $F_y(B_f(a, r_1)) \subset B(a, r_1) \subset B_f(a, r_1)$.

Par ailleurs, on observe que

$$\|F_y(x) - F_y(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\| .$$

Le théorème du point fixe assure donc que, pour tout $y \in B(b, r_2)$, F_y possède un unique point fixe dans $B_f(a, r_1)$; de plus, ce point fixe est en fait dans $B(a, r_1)$.

Cela signifie que, pour tout $y \in B(b, r_2)$, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution, notée $g(y)$ dans $B_f(a, r_1)$ et que cette solution est même dans $B(a, r_1)$.

Considérons donc l'application

$$\tilde{f} : U_1 := B(a, r_1) \cap f^{-1}(B(b, r_2)) \ni x \mapsto f(x) \in B(b, r_2) =: V_1 .$$

On vient de voir que $\tilde{f}$ est bijective. Sa bijection réciproque est g. Démontrons que cette fonction g est en fait continue. Nous allons voir qu'il n'y a pas grand chose à faire : nous avons déjà fait tous les calculs nécessaires.

Rappelons qu'on a établi que, pour tout $y \in B(b, r_2)$,

$$g(y) = a + (df_a)^{-1}(y - f(a) - \varphi(g(y))) . \tag{1}$$

Un calcul élémentaire donne que, pour tout $y_1, y_2 \in B(b, r_2)$,

$$\begin{aligned} \|g(y_1) - g(y_2)\| &\leq M\|y_1 - y_2\| + M\|\varphi(g(y_1)) - \varphi(g(y_2))\| \\ &\leq M\|y_1 - y_2\| + \frac{M}{2M}\|g(y_1) - g(y_2)\| . \end{aligned}$$

Cela établit le caractère lipschitzien de g. On peut aussi voir les choses d'un point de vue différent et qui donne une explication de la continuité sans ce calcul supplémentaire (qui refait intervenir la contractance). L'uniformité des estimations en y est en fait suffisante pour conclure. Il suffit d'interpréter autrement les estimations déjà faites.

La fonction g est définie sur $V_1 = B\left(b, r_2\right)$ et à valeurs dans $B(a, r_1)$ et elle vérifie

$$g = a + (df_a)^{-1}(\mathrm{Id}_{V_1} - f(a) - \varphi(g)) . \tag{2}$$

La fonction g est donc manifestement solution d'un problème de point fixe ! Mais dans quel espace complet ? Comme nous cherchons à établir la continuité, nous allons considérer un espace de fonctions continues.

Point fixe dans un espace de fonctions continues Introduisons l'espace naturel pour considérer (2) :

$$X = \{K \in C^0\left(V_1, E\right) : K(V_1) \subset B_f(a, r_1)\} .$$

X est clairement un sous-espace fermé du complet $C_b^0\left(V_1, E\right)$ muni de la distance uniforme. On a aussi $a + (df_a)^{-1}(\mathrm{Id}_{V_1} - b) \in X$.

Considérons l'application

$$T : K \mapsto a + (df_a)^{-1}(\mathrm{Id}_{V_1} - b - \varphi \circ K)$$

définie de X à valeurs dans $C^0(V_1, E)$. Noter que $T(K)(y) = F_y(K(y))$.

L'application T est en fait à valeurs dans

$$\{K \in C^0\left(V_1, E\right) : K(V_1) \subset B(a, r_1)\} ,$$

et elle est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, comme on peut le voir avec le paragraphe précédent en remplaçant les x par des $K(y)$.

Par le théorème du point fixe cette application possède donc un unique point fixe K_0 qui appartient même à

$$\{K \in C^0\left(V_1, E\right) : K(V_1) \subset B(a, r_1)\} .$$

Plus explicitement, cela signifie que, pour tout $y \in B(b, r_2)$,

$$T(K_0)(y) = F_y(K_0(y)) = K_0(y) ,$$

ou encore $f(K_0(y)) = y$. Par unicité, nous avons, pour tout $y \in B(b, r_2)$, $K_0(y) = g(y)$; g est donc continue et $\tilde{f}$ est un homéomorphisme.

On peut alors utiliser la Proposition 2.10 et en particulier le point (8) pour voir que $\tilde{f}$ est un C^1-difféomorphisme . ■

4.5 Exercices

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Soient $F : E \to F$ une application uniformément continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de E alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E.
On suppose que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.
Montrer que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|'$.

Exercice 4.

1. Montrer que les espaces vectoriels normés des exercices suivants de la section 1.9 sont complets : 5.(2), 5.(3), 5.(4), 5.(5), 5.(6) (où $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet), 5.(7) (où $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet).
2. En considérant la famille de polynômes $\left(P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{p^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $p > 0$ fixé, montrer que l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_m)$ (c.f. 5.(1)) n'est pas complet pour $m < p$.
   On pourra commencer par montrer que si une suite de polynômes converge vers un polynôme alors les suites de coefficients convergent.

Exercice 5.

Considérons l'espace vectoriel normé $(C^0([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions $[-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.
2. Supposons que cette suite converge vers une fonction $f \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a :
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)| dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)| dt = 0$$
   (b) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$,
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1| dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1| dt = 0$$
   (c) En déduire que, pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = 1$ et pour $t \in [-1,0[$, $f(t) = -1$.
3. Conclure.

Exercice 6.

1. Montrer que si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces de Banach alors $(E \times F, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach pour la norme $\|(x,y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$.
2. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E.
   Montrer que l'espace vectoriel normé E/F est complet pour la norme de l'Exercice 7.

Exercice 7. L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement toute série absolument convergente est convergente.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

   On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

   Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente (dans E).
2. On suppose que toute série absolument convergente de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.
   (a) Montrer que l'on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|u_{\sigma(n+1)} - u_{\sigma(n)}\right\| \leq 2^{-n}.$$
   (b) Montrer que $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Conclure.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension dénombrable. On fixe $\mathcal{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une base de E. On note $F_0 = \{0\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $F_n \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
On considère la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\lambda_{n+1} \coloneqq \frac{1}{3}\inf_{x\in F_{n-1}} \left\|\frac{\lambda_n}{\|e_n\|}e_n - x\right\|$.

1. Justifier que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est bien définie.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \lambda_n > 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \lambda_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{3}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \lambda_n \leq 3^{-n}$.
5. On suppose par l'absurde que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.
   (a) Montrer qu'il existe $\ell \in E$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\|e_n\|}e_n = \ell$.
   (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\|e_n\|}e_n \in F_N$.
   (c) Montrer que $3\lambda_{N+2} \leq \frac{3}{2}\lambda_{N+2}$.
6. Conclure.
7. Reprendre l'exercice 4.(2).

Exercice 9. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
(i) $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0,1] \setminus \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$
(ii) f_n est affine par morceaux sur les intervalles $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+2}}\right]$ et $\left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right]$
(iii) $f_n\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = n$

1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est absolument convergente et divergente pour la norme $\|\cdot\|_1$.
2. Que peut-on en déduire sur $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$?

Exercice 10. Soit E l'espace vectoriel $C^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par
$$\|f\| \coloneqq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $F_n \in E$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.
   On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F \in E$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2. Montrer que E est complet.
3. On considère l'application $T : E \to E$ définie par

$$\forall f \in E,\ T(f) : x \in [0,1] \mapsto 1 + \int_0^x f\left(t - t^2\right)\, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

   (a) Montrer que T^2 est une contraction.
   Indice : on pourra commencer par montrer que $\forall t \in [0,1], t - t^2 \leq \frac{1}{4}$.

   (b) En déduire que T a un unique point fixe puis qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y\left(t - t^2\right) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 11. On considère l'espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. On cherche à montrer qu'il existe une unique fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{1}{14}\int_0^x s^2 \sin(f(s))\mathrm{d}s\,.$$

   (a) Pour $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose

$$T(f) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{14}\int_0^x s^2 \sin(f(s))\mathrm{d}s \end{array}.$$

   Montrer que cela définit bien une fonction $T : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que T est contractante.

   (c) Conclure.