

Université d'Angers

Intégrale de Lebesgue

Jean-Baptiste Campesato

Version du 1^{er} septembre 2026

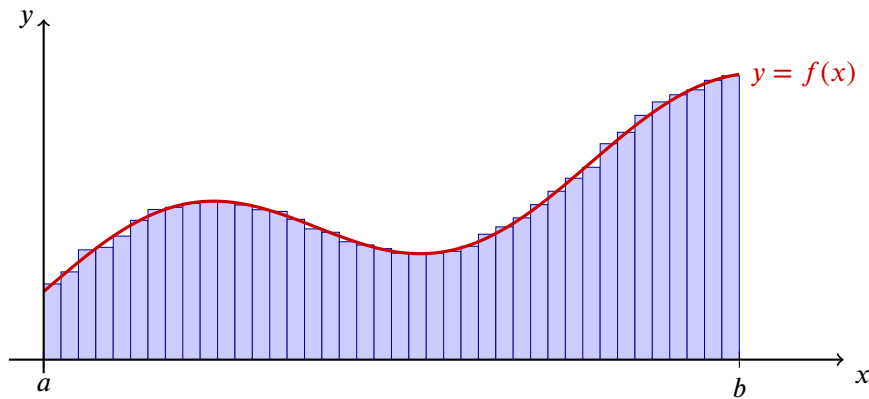
Table des matières

Introduction	2
1 Prérequis	7
1.1 Formulaire ensembliste	7
1.2 Limite supérieure et limite inférieure	12
1.3 Cardinalité	15
Exercices	25
2 Espaces mesurés	29
2.1 Tribus et espaces mesurables	29
2.2 Fonctions mesurables	31
2.3 Mesures et espaces mesurés	33
Exercices	37
3 Intégration par rapport à une mesure	38
3.1 Fonctions étagées positives	38
3.2 Fonctions mesurables positives	38
3.3 Fonctions intégrables	38
3.4 Convergence dominée	38
3.5 Intégrales à paramètre	38
4 Mesure de Lebesgue	39
4.1 Classes monotones	39
4.2 Théorème de Caratheodory	39
4.3 Existence et unicité	39
4.4 Liens avec l'intégrale de Riemann	39
5 Théorème de Fubini	40
5.1 Mesure produit	40
5.2 Théorème de Fubini	40
5.3 Applications à la mesure de Lebesgue	40
6 Espaces L^p	41
6.1 Définitions	41
6.2 Structure d'espace de Banach	41

Introduction

De Riemann à Lebesgue

De façon informelle, l'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un segment $[a, b]$ s'obtient de la façon suivante. On subdivise le domaine $[a, b]$ (au niveau de l'axe des abscisses), sur chaque subdivision on remplace la fonction par une fonction constante correspondant à une valeur¹ de f et on regarde la somme des aires des rectangles obtenus. L'intégrale de Riemann est alors la limite de ces valeurs, si elle existe, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.



La théorie ainsi obtenue permet d'intégrer de nombreuses fonctions, puisqu'une fonction bornée sur un segment est intégrable au sens de Riemann si et seulement si son lieu de discontinuité est négligeable². Elle admet de nombreuses propriétés intéressantes : l'intégrale de Riemann est linéaire, elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz (stabilité par passage au produit), l'inégalité triangulaire, la relation de Chasles, le théorème de la moyenne (une version intégrale du théorème des accroissements finis) et elle est stable par restriction.

Elle vérifie aussi la version suivante du théorème fondamental de l'analyse : si une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable admet une primitive $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$; si de plus f est continue alors $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f$ est une primitive de f .

Enfin, elle se comporte bien vis-à-vis de la convergence uniforme : si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables qui converge uniformément vers f alors f est Riemann-intégrable et $\int f = \lim \int f_n$.

Elle souffre néanmoins des lacunes suivantes.

- L'intégrale de Riemann se comporte bien vis-à-vis de la convergence uniforme, qui est une condition très forte, mais la classe des fonctions Riemann-intégrables n'est pas stable par limite simple, même croissante, même bornée, même à partir de fonctions continues.
Par exemple, la suite $(f_n)_n \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ définie par $f_n = \mathbb{1}_{\{q_0, q_1, \dots, q_n\}}$, où $(q_n)_n$ est une énumération de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est croissante et bornée mais sa limite $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable. Il faut donc une nouvelle théorie avec plus de fonctions intégrables de sorte à ce que de telles limites soient intégrables.
- L'intégrale de Riemann n'a de sens que pour des fonctions définies sur un segment (ou un pavé en dimension supérieure) : lorsque le domaine n'est pas borné, il faut l'approcher par des parties Jordan-mesurables compactes mais, si la fonction n'est pas absolument intégrable, la valeur peut dépendre de l'exhaustion choisie. Dans le cas univarié avec un intervalle quelconque, le problème se règle en demandant à faire tendre chaque borne indépendamment l'une

¹L'approche de Darboux compare l'infimum et le supremum sur chaque subdivision : il n'est pas nécessaire de fixer de valeur arbitraire sur chaque subdivision, il y a ainsi une dépendance en moins qui facilite grandement l'étude de la limite lorsque le pas tend vers 0 – en revanche, cette approche nécessite d'imposer que f soit bornée (ce qui est une conséquence de la définition dans l'approche de Riemann).

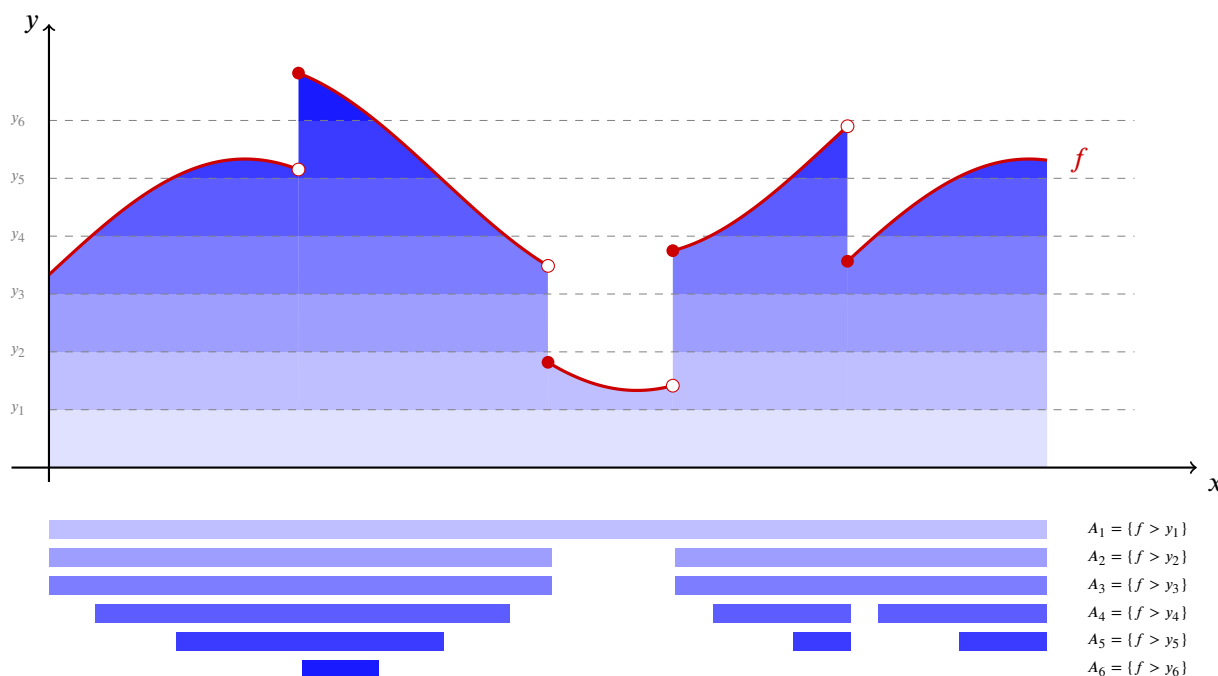
²Une partie $D \subset \mathbb{R}$ est négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des segments $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $D \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n - a_n) < \varepsilon$. On verra dans le cours que cela signifie que la mesure de Lebesgue de D est nulle.

de l'autre – mais ça ne se généralise pas en dimension supérieure – et de nombreux résultats ne sont plus valides si la fonction n'est pas absolument intégrable. Par exemple, pour $c > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^{cn} \frac{x}{1+x^2} dx = \ln c$.

- Les espaces L^1 et L^2 ne sont pas complets pour l'intégrale de Riemann : ce n'est pas le bon cadre pour l'analyse de Fourier (ni plus généralement pour l'analyse fonctionnelle).
- Le théorème d'interversion pour les intégrales de Riemann multiples nécessite des hypothèses de continuité (et pas seulement d'intégrabilité) pour que $\iint dx dy = \iint dy dx$.
- La construction de l'intégrale de Riemann subdivise le domaine, ce qui ne permet pas de la généraliser à des fonctions sur un domaine quelconque (l'intégrale de Lebesgue fera sens sur tout espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sans faire appel à aucune notion topologique).

L'intégrale de Lebesgue, que l'on étudie dans ce cours, pallie tous ces manques. L'idée principale consiste à s'intéresser aux valeurs et à subdiviser l'axe des ordonnées plutôt que celui des abscisses. L'intégrale au sens de Lebesgue d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est alors approchée par $\sum_k y_k \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1}]))$. Ainsi, il n'est plus nécessaire de faire d'hypothèse sur la régularité de f (pour que les sommes de Riemann approchent l'aire sous la courbe, il faut que la fonction n'ait pas trop de sauts – qu'elle soit suffisamment régulière – voir ce qu'il se passe avec $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$). La contrepartie étant que la préimage $f^{-1}([y_k, y_{k+1}])$ n'est généralement pas une partie polygonale : on va devoir donner un sens à son aire et c'est là que la notion de mesure, qui va nous occuper pendant la première partie du semestre, entre en jeu.

L'exemple suivant simplifie grandement la situation avec des ensembles "jolis" puisque la fonction est très régulière. Il est instructif de se représenter la situation avec $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue.



$$\int f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) dt \approx \sum_k (y_{k+1} - y_k) \mu(A_k)$$

Nuançons néanmoins les succès de la construction de Lebesgue :

- La fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue (alors qu'elle est intégrable au sens de Henstock–Kurzweil).

- Elle présuppose plus de prérequis que celle de Riemann : « Cette notion est assurément plus simple que la première, mais elle exige une certaine maturité d'esprit et quelque familiarité dans la connaissance des points où une fonction prend la même valeur. Un jour que de jeunes mathématiciens réunis chez moi discutaient sur l'opportunité d'enseigner dès le début l'intégrale de Lebesgue, celui-ci arriva inopinément. On lui posa la question : « Par quelle intégrale doit-on commencer devant de jeunes étudiants ? — Par celle de Riemann, bien entendu », répliqua Lebesgue. »
Propos de Lebesgue rapportés par Paul Montel, dans A. Denjoy, L. Félix et P. Montel, « Henri Lebesgue : le savant, le professeur, l'homme », *L'Enseignement Mathématique*, 2^e sér., 3 (1957), p. 15.

Quelques analogies concrètes pour appréhender la différence entre les théories de Riemann et de Lebesgue

« Je dois payer une certaine somme, disait-il ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale. »

Propos de Lebesgue rapportés par Paul Montel, *Ibid*, pp. 15–16.

« On a trouvé bien des images pour faire saisir la différence séparant les deux conceptions. Soit, par exemple, à calculer la hauteur moyenne d'une rivière au-dessus d'un étiage, sur la période d'une année (non bissextile), quand la hauteur quotidienne, mesurée en centimètres, est notée. Avec Riemann, à toute fraction d'année constituée par une journée particulière, soit $1/365$, on appliquera un facteur, constituant le poids attribué à cette fraction, et ce poids sera la hauteur des eaux ce jour-là. On ajoutera les trois cent soixante-cinq produits. Avec Lebesgue, on collationnera les diverses hauteurs distinctes observées entre la plus basse et la plus élevée. À chacune de ces hauteurs on appliquera un facteur-poids qui sera la fraction d'année (nombre de jours divisé par 365) où le niveau s'est inscrit à cette hauteur. On ajoute les résultats. »

Par Arnaud Denjoy, *Ibid*, pp. 2–3.

Frise chronologique

Ci-dessous une frise chronologique (non-exhaustive) sur différentes notions utilisées d'abord pour étudier des aires puis pour étudier les intégrales de fonctions. On remarquera que certains progrès ont été faits sur les aspects calculatoires, au détriment de la rigueur (pourquoi est-ce bien défini ? quelles fonctions sont intégrables ?), et d'autres sur les aspects formels sans forcément offrir plus d'efficacité pour le calcul effectif d'intégrales. À partir du 19^e siècle, les questions portent plutôt sur ce dernier aspect avec pour objectif d'augmenter la classe des fonctions intégrables et l'obtention de théorèmes généraux utiles à l'analyse tels que l'interversion limite-intégrale.

- ANTIQUITÉ. Calculs exacts d'aires par la méthode d'*exhaustion* qui procède par l'absurde en encadrant une surface par des polygones. Cette méthode permet par exemple à Euclide de montrer que les aires des disques sont proportionnelles aux carrés des diamètres. Archimède utilise cette méthode à plusieurs reprises pour différentes surfaces et différents résultats généraux.
- XVII^e SIÈCLE. Des aires et des volumes sont calculés à partir de somme d'infinitésimaux (on voit par exemple un volume comme une somme de tranches infiniment minces), notamment par Kepler, Cavalieri, Fermat, Wallis et d'autres... Cette méthode s'avère très efficace et permet de nombreux calculs, cependant on perd en rigueur puisque la question de savoir si ces calculs sont bien-fondés ne se pose pas (il faudra attendre l'analyse non standard dans la seconde moitié du 20^e siècle pour donner un cadre rigoureux au calcul des infinitésimaux – on continue néanmoins d'utiliser le cadre classique, avec les définitions à la ε - η de Weierstrass qui avaient pour objectif de remplacer les infinitésimaux par un cadre rigoureux dans la seconde moitié du 19^e siècle). Plusieurs points méritent d'être mis en avant :

- * Gregory puis Barrow observent le lien entre aire sous la courbe et primitive.
- * Newton et Leibniz observent que primitiver et dériver sont des opérations réciproques l'une de l'autre (et Leibniz introduit le symbole $\int$ avec la relation $\int df = f$ – le théorème fondamental de l'analyse apparaît, il sera plus tard généralisé en dimension supérieure par le théorème de Stokes).
- * Fermat calcule l'aire sous la courbe $y = x^n$ à l'aide d'une subdivision du domaine en progression géométrique : c'est une somme de Riemann avant l'heure.
- * Grégoire de Saint-Vincent observe que l'aire sous l'hyperbole transforme les produits en sommes. Alphonse Antoine de Sarasa fera le rapprochement avec le logarithme qui vient d'être introduit par Napier.

On remarquera que les deux points précédents sont liés puisque l'hyperbole correspond à $y = x^n$ lorsque $n = -1$: c'est exactement le seul rationnel pour lequel la méthode de Fermat ne fonctionne pas (elle donne une série divergente).

- XVIII^E SIÈCLE. L'approche du siècle précédent perdure avec le développement de beaucoup de méthodes de calcul. Par exemple Euler systématise la méthode du changement de variables de Newton et Leibniz et introduit les fonctions Γ et B ... Jacob Bernoulli introduit le terme *integralis* et Johann Bernoulli publie le premier traité portant sur le calcul intégral *Lectiones mathematicae de methodo integralium*. En revanche, on ne se pose toujours pas la question du bien-fondé des calculs (autrement dit, de savoir quelles fonctions admettent une primitive).
- XIX^E SIÈCLE. On repasse de méthodes de calcul à des définitions rigoureuses de l'intégrale. Ces développements sont motivés par les travaux de Fourier³ où les séries trigonométriques forcent à intégrer des fonctions non régulières : ce sera une motivation pour les théories de Riemann et Lebesgue, ainsi que pour les résultats de Fatou et de Riesz–Fischer.
 - * En 1823, Cauchy⁴ définit l'intégrale d'une fonction continue sur un segment comme la limite de $\sum_i (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$ dont il démontre la convergence : le théorème fondamental de l'analyse devient un théorème et non plus une définition/méthode de calcul.
 - * En 1854, Riemann⁵ étend la construction de Cauchy à une classe bien plus large de fonctions bornées sur un segment. Il caractérise les fonctions intégrables en termes d'oscillations (une notion utilisée pour étudier la continuité) – aujourd'hui, cette caractérisation est remplacée par le critère de Lebesgue, plus commode : une fonction bornée sur un segment est intégrable au sens de Riemann si et seulement si son lieu de discontinuité est négligeable. Il exhibe surtout une fonction intégrable dont l'ensemble des discontinuités est dense, rompant ainsi le lien entre intégrabilité et continuité.
 - * En 1875, Darboux⁶ donne une construction équivalente à l'intégrale de Riemann via les sommes de Darboux (c'est l'approche de l'intégrale de Riemann dans mes notes *d'analyse approfondie*). Il démontre entre autres qu'une dérivée (même si elle n'est pas continue) vérifie toujours la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires et construit une fonction dérivable dont la dérivée est discontinue sur un ensemble dense.
 - * En 1881, Volterra⁷ construit une fonction dérivable sur $[0, 1]$, à dérivée bornée, dont la dérivée n'est pas intégrable au sens de Riemann : le lien même entre dérivation et intégration (et donc le théorème fondamental de l'analyse) tombe en défaut dans cette théorie.
 - * En 1898, Borel⁸ montre qu'il faut ajouter à la notion de mesure (comme celle de Jordan) une condition d'additivité dénombrable (la σ -additivité) pour faire commuter mesure et limite.

³Théorie analytique de la chaleur (1822).

⁴21^e leçon sur le calcul infinitésimal à l'École Royale Polytechnique.

⁵Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, publié en 1867.

⁶Mémoire sur les fonctions discontinues, Annales scientifiques de l'ÉNS, 2^e série, vol. 4 (1875).

⁷Sui principii del calcolo integrale, Giornale di Matematiche, vol. 19 (1881), p. 333–372.

⁸Leçons sur la théorie des fonctions.

- XX^E SIÈCLE. C'est l'essor de l'intégrale de Lebesgue que nous allons étudier dans ce cours (il y a eu de nombreux autres développements sur la théorie de l'intégration mais qui sortent du cadre de ce cours).
 - * Dans la continuité des travaux de Borel, Jordan et Darboux, Lebesgue⁹ donne une définition axiomatique d'un opérateur intégral à partir d'un découpage sur l'axe des ordonnées plutôt que des abscisses. Ces travaux contiennent de nombreux résultats portant sur cette théorie : théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée, le théorème fondamental de l'analyse s'applique à toute fonction dérivable de dérivée bornée...
 - * En 1905, Young¹⁰ propose une construction équivalente de l'intégrale de Lebesgue : c'est l'approche utilisée dans ce cours.
 - * En 1905, Vitali¹¹ montre qu'il n'existe pas de mesure σ -additive, normalisée et invariante par translation sur $\mathbb{R}$ qui mesure toutes les parties bornées¹² (l'axiome du choix permet de construire des ensembles non mesurables). Il montre aussi que les fonctions vérifiant le théorème fondamental de l'analyse sont celles *absolument continues*.
 - * En 1906, Fatou¹³ énonce une inégalité de passage à la limite sans hypothèse de domination.
 - * En 1907, Riesz¹⁴ et Fischer¹⁵ démontrent indépendamment que l'espace L^2 est complet et isométrique à l'espace ℓ^2 . Ainsi la théorie de Lebesgue fournit le bon cadre pour la théorie de Fourier (une suite de carré sommable est toujours la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de carré intégrable). Dans le cas de l'intégrale de Riemann, l'espace des fonctions de carré intégrable n'est pas complet. Ces résultats donnent aussi naissance à la notion d'espaces de Hilbert.
 - * Fubini¹⁶ et Tonelli¹⁷ obtiennent des théorèmes d'interversion pour les intégrales multiples (pour les fonctions intégrables pour le premier et positives pour le second – alors qu'il fallait des hypothèses de continuité pour l'intégrale de Riemann).
 - * En 1914, Carathéodory¹⁸ introduit la notion de mesure extérieure et expose une méthode de construction de mesures qui généralise celle de Lebesgue et permet d'obtenir d'autres mesures.
 - * En 1915, Fréchet¹⁹ introduit le cadre abstrait d'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sans aucune structure topologique. C'est le cadre de ce cours.

La frise ci-dessus est loin d'être exhaustive et omet de nombreux développements : soit parce que je ne connais pas leur historique (notamment en théorie des probabilités avec les travaux de Kolmogorov), soit parce qu'ils sont trop nombreux pour être cités ici (comme l'intégrale de Stieltjes qui est une version pondérée de celle de Riemann pour étudier des distributions de masses, les travaux de Radon sur la théorie de la mesure, l'intégrale de Henstock–Kurzweil qui est une version pointée de l'intégrale de Riemann avec des théorèmes d'interversion similaires à ceux de l'intégrale de Lebesgue...).

⁹ *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 132 (29 avril 1901) ; Thèse *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, série III, vol. 7 (1902) ; *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904).

¹⁰ *On upper and lower integration*, Proc. London Math. Soc. (1905).

¹¹ *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologne, Gamberini e Parmeggiani, 1905 ; *Sulle funzioni integrali*, 1905, Atti Acc. Torino.

¹² Banach a démontré qu'il existait des mesures *finiment additives* sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ qui soient normalisées, invariantes par isométrie et permettent de mesurer toutes les parties bornées – le paradoxe de Banach–Tarski permet de voir que ce n'est plus vrai en dimension supérieure.

¹³ *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Mathematica, vol. 30 (1906).

¹⁴ F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 144 (1907), p. 615–619.

¹⁵ E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, *ibid.*, p. 1022–1024.

¹⁶ *Sugli integrali multipli*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (1907).

¹⁷ *Sull'integrazione per parti*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (1909).

¹⁸ *Über das lineare Mass von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nachrichten de la Société des sciences de Göttingen (1914).

¹⁹ *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bulletin de la SMF, vol. 43 (1915).

1 Prérequis

Cette section présente des notions, dont la plupart ont déjà été rencontrées les années précédentes, mais dont l'utilisation sera constante tout au long de ce cours. Quelques points méritent une attention particulière :

- L'image réciproque²⁰ commute avec toutes les opérations booléennes (réunion, intersection et complémentaire), alors que l'image directe ne commute qu'avec la réunion ; voir la Proposition 1.12.
- Les fonctions indicatrices réalisent une correspondance entre ensembles et fonctions, nous les utiliserons souvent.
- La dénombrabilité apparaîtra dès la définition de tribus pour que les suites de fonctions se comporteront bien vis-à-vis des mesures.

1.1 Formulaire ensembliste

1.1.1 Réunions et intersections

Définitions 1.1. Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I quelconque. On définit la *réunion* des $(A_i)_{i \in I}$ par

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in E : \exists i \in I, x \in A_i\}$$

et l'intersection des $(A_i)_{i \in I}$ par

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in E : \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Remarque 1.2. Pour $I = \emptyset$, on obtient $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ et $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = E$.

Définition 1.3. Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on définit le *complémentaire* de A dans E par

$$E \setminus A := \{x \in E : x \notin A\}.$$

Lorsque l'espace ambiant E est fixé sans ambiguïté, on note simplement A^c pour $E \setminus A$.

Proposition 1.4. Soient E un ensemble et $A \subset E$ alors $E \setminus (E \setminus A) = A$.

Démonstration. Soit $x \in E$ alors $x \in E \setminus (E \setminus A) \Leftrightarrow x \notin E \setminus A \Leftrightarrow x \in A$. ■

Proposition 1.5 (Lois de Morgan). Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I quelconque, alors

$$E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i) \quad \text{et} \quad E \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (E \setminus A_i).$$

Démonstration. Montrons la première égalité, la deuxième en découle via la proposition précédente. Soit $x \in E$ alors $x \in E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \neg (\exists i \in I, x \in A_i) \Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)$. ■

1.1.2 Fonctions

Définition 1.6. Soient E et F deux ensembles. Une *fonction* $f : E \rightarrow F$ est la donnée d'une partie $\Gamma_f \subset E \times F$ telle que $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma_f$.

On dit que f est le nom de la fonction, que E est le *domaine* de f , que F est l'*ensemble d'arrivée* de f et que Γ_f est le *graphe* de f .

Pour $x \in E$, on note $f(x) := y$ où y est l'unique élément de F tel que $(x, y) \in \Gamma_f$.

On note F^E l'ensemble des applications de $E \rightarrow F$.

²⁰Elle apparaît dès l'introduction pour expliquer la différence majeure entre les constructions de Riemann et de Lebesgue.

De façon moins formelle, une fonction $f : E \rightarrow F$ est la donnée de deux ensembles E et F , respectivement le domaine et l'ensemble d'arrivée, ainsi que d'un processus qui assigne à chaque $x \in E$ un unique $f(x) \in F$.

Remarque 1.7. Le domaine et l'ensemble d'arrivée font parties intégrante de la définition d'une fonction.

Ainsi $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[\\ x \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$ ne sont pas égales²¹.

Et de même $h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ et $i : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ne sont pas égales²².

Il existe plusieurs façons de définir une fonction :

- À la main : on définit $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(1) = \pi$, $f(2) = e$ et $f(3) = 42$.
- Par une formule (en précisant bien le domaine et l'ensemble d'arrivée) :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[\\ x \mapsto x^2 + 1 \end{cases}.$$

- Par morceaux : on considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- Par certaines propriétés : on montre qu'il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- ...

Les fonctions suivantes sont mal définies :

- $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ car $\sqrt{-1}$ ne permet pas d'associer une valeur dans $\mathbb{R}$ à -1 .
- $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ car 0 est associé à une valeur n'étant pas dans l'ensemble d'arrivée.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ car 0 n'est pas associé à une unique valeur.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ car 0 n'est pas associé à une valeur.

Définitions 1.8. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, alors :

- on dit que f est *injective* si

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou, de façon équivalente en prenant la contraposée, si

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2;$$

- on dit que f est *surjective* si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x);$$

- on dit que f est *bijjective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

²¹Par exemple, la première est surjective mais pas la deuxième.

²²Par exemple, la deuxième est injective mais pas la première.

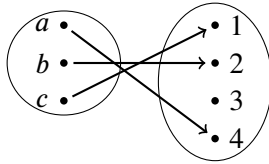


FIG. : Injective

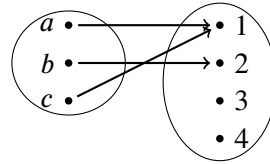


FIG. : Non injective

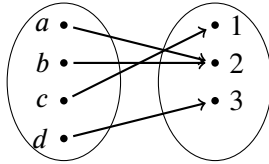


FIG. : Surjective

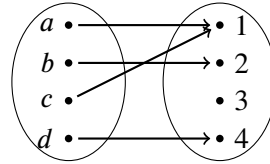


FIG. : Non surjective

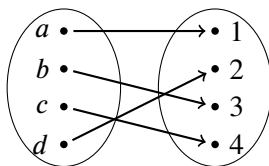


FIG. : Bijective

Définitions 1.9. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, alors :

- l'image de $A \subset E$ par f est $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subset F$,
- l'image de f est $\text{Im}(f) := f(E)$,
- l'image réciproque (ou préimage) de $B \subset F$ par f est $f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\}$,
- le graphe de f est $\Gamma_f := \{(x, y) \in E \times F : y = f(x)\}$.

Remarque 1.10. Attention, $f^{-1}(B)$ est une notation valable même lorsque f n'est pas bijective (et donc que la fonction réciproque f^{-1} n'est pas définie). Il s'agit simplement d'une notation.

Remarque 1.11. Attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée et l'image d'une fonction.

Proposition 1.12. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- (1) Soient $A_1 \subset A_2 \subset E$ alors $f(A_1) \subset f(A_2)$.
- (2) Soient $B_1 \subset B_2 \subset F$ alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- (3) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I quelconque, alors
 - (a) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;
 - (b) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
- (4) Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F indexée par un ensemble I quelconque, alors
 - (a) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;
 - (b) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- (5) Soit A une partie de E alors
 - (a) $f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$;
 - (b) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- (6) Soit B une partie de F alors
 - (a) $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$;
 - (b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Remarque 1.13. Lorsque f n'est pas injective, les inclusions des points 3.(b), 5.(a) et 5.(b) peuvent être strictes.

Lorsque f n'est pas surjective, l'inclusion 6.(b) peut être stricte.

Voir l'Exercice 1.5.

Définition 1.14. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux fonctions où $\text{Im}(f) \subset G$. On définit la *composée* de g avec f par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

On démontre aisément que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (associativité de la composition), ce qui permet de simplement noter $h \circ g \circ f$.

Remarque 1.15. Attention, la composition n'est en revanche pas commutative. En effet, définissons $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$. Alors $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(4) = 5$ et $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(3) = 9$. Donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 1.16. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux fonctions où $\text{Im}(f) \subset G$, alors

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective aussi;
- Si $\text{Im}(f) = G$ et si g est surjective alors $g \circ f$ est surjective aussi;
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective;
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Démonstration.

- Supposons f et g injectives. Soient $x, y \in E$ tels que $g(f(x)) = g(f(y))$.
Puisque g est injective, on obtient $f(x) = f(y)$. Puisque f est injective, on obtient $x = y$.
Donc $g \circ f$ est injective.
- Supposons $\text{Im}(f) = G$ et g est surjective. Soient $z \in H$.
Puisque g est surjective, il existe $y \in G$ tel que $z = g(y)$.
Puisque $\text{Im}(f) = G$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Donc $z = g(f(x))$ et $g \circ f$ est surjective.
- Supposons que $g \circ f$ soit injective.
Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ et donc $x = y$ puisque $g \circ f$ est injective.
On a bien montré que $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$.
- Supposons que $g \circ f$ soit surjective.
Soit $y \in H$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $z \in E$ tel que $y = g(f(z))$.
Posons $x := f(z) \in \text{Im}(f) \subset G$. Alors $g(x) = y$.
On a bien montré que $\forall y \in H, \exists x \in G, g(x) = y$.

■

Proposition 1.17. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

Dans ce cas, g est unique et est appelée fonction réciproque de f que l'on dénote par $f^{-1} : F \rightarrow E$.

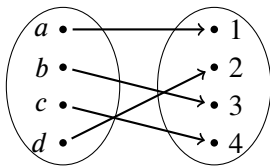


FIG. : Fonction bijective

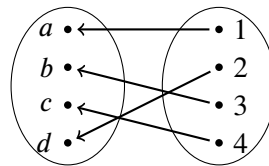


FIG. : Sa réciproque

Démonstration. Supposons que f soit bijective.

Alors pour tout $y \in F$, il existe un unique $x_y \in E$ tel que $y = f(x_y)$.

On définit $g : F \rightarrow E$ par $g(y) = x_y$.

Soit $x \in E$. Puisque f est injective, on déduit de $f(x) = f(x_{f(x)})$ que $x = x_{f(x)}$. Donc $g(f(x)) = x_{f(x)} = x$.

Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f(x_y) = y$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $g : F \rightarrow E$ tel que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Puisque $f \circ g = \text{id}_F$ est surjective, on a que f est surjective.

Puisque $g \circ f = \text{id}_E$ est injective, on a que f est injective.

Donc f est bijective.

Il reste à montrer l'unicité de la réciproque.

Supposons que $g : F \rightarrow E$ et $\tilde{g} : F \rightarrow E$ conviennent.

Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = y = f(\tilde{g}(y))$ et donc $g(y) = \tilde{g}(y)$ puisque f est injective.

Donc $\tilde{g} = g$. ■

Proposition 1.18. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Soit $x \in E$, alors $((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f))(x) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Soit $y \in G$, alors $((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))(y) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(y)))) = g(g^{-1}(y)) = y$.

Donc $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

1.1.3 Fonctions indicatrices

Définition 1.19. Soient E un ensemble et $A \subset E$. La *fonction indicatrice* de A est la fonction $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A. \end{cases}$$

La proposition suivante montre que les fonctions indicatrices réalisent une correspondance entre opérations sur les ensembles et opérations sur les fonctions.

Proposition 1.20. Soit E un ensemble. L'application $\mathcal{P}(E) \ni A \mapsto \mathbb{1}_A \in \{0, 1\}^E$ est une bijection²³ de réciproque $\{0, 1\}^E \ni g \mapsto g^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{P}(E)$.

De plus, pour $A, B \subset E$, on a :

- | | |
|--|--|
| (1) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$; | (6) $\mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$; |
| (2) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$; | (7) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$; |
| (3) $A = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \equiv 0$; | (8) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; |
| (4) $A = E \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \equiv 1$; | (9) $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$; |
| (5) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$; | (10) $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B $ où $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
est la différence symétrique. |

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de parties de E avec $I \neq \emptyset$ alors

- (11) $\mathbb{1}_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \sup_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$;
 (12) $\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \inf_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$.

Démonstration. Montrons que $\varphi : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(g) := g^{-1}(\{1\})$ et $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ définie par $\psi(A) = \mathbb{1}_A$ sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $g \in \{0, 1\}^E$ alors $\psi \circ \varphi(g) = \mathbb{1}_{g^{-1}(\{1\})} = g$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $\varphi \circ \psi(A) = (\mathbb{1}_A)^{-1}(\{1\}) = A$.

Les relations de l'énoncé sont à démontrer dans l'Exercice 1.8. ■

Proposition 1.21. Soit $f : E \rightarrow F$.

- (1) Pour tout $B \subset F$, on a $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f$.
 (2) Soit $A \subset E$, alors $\mathbb{1}_{f(A)}(y) = 1$ si et seulement s'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
 En particulier, si f est bijective alors $\mathbb{1}_{f(A)} = \mathbb{1}_A \circ f^{-1}$.

²³C'est pour cela que l'on trouve aussi la notation 2^E pour $\mathcal{P}(E)$.

1.2 Limite supérieure et limite inférieure

1.2.1 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite d'ensembles

Définition 1.22. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E . On appelle respectivement *limite supérieure* et *limite inférieure* de $(A_n)_n$ les ensembles

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

On retiendra de la définition ci-dessus qu'étant donné $x \in E$:

- $x \in \limsup_n A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_n ,
i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, x \in A_k$;
- $x \in \liminf_n A_n$ si et seulement si x appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang,
i.e. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, x \in A_k$.

Proposition 1.23. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E .

- (1) $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$;
- (2) $E \setminus \limsup_n A_n = \liminf_n (E \setminus A_n)$;
- (3) $E \setminus \liminf_n A_n = \limsup_n (E \setminus A_n)$.

Démonstration.

- (1) Soit $x \in \liminf_n A_n$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N, x \in A_k$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $k := \max(N, n)$ alors $k \geq n$. De plus $k \geq N$ d'où $x \in A_k$. Ainsi $x \in \limsup_n A_n$.
- (2) On a

$$\begin{aligned} E \setminus \limsup_n A_n &= \{x \in E : \neg (\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, x \in A_k)\} \\ &= \{x \in E : \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, x \in E \setminus A_k\} = \liminf_n (E \setminus A_n). \end{aligned}$$

- (3) D'après l'énoncé précédent appliqué à $(E \setminus A_n)_n$, on a $E \setminus \limsup_n (E \setminus A_n) = \liminf_n A_n$ d'où
 $E \setminus \liminf_n A_n = \limsup_n (E \setminus A_n)$. ■

Définition 1.24. On dit qu'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties d'un ensemble E converge vers $A \subset E$ si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = A$ et on note alors $A = \lim_n A_n$.

Proposition 1.25. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante (resp. décroissante) converge vers $\bigcup_n A_n$ (resp. $\bigcap_n A_n$).

Démonstration. Supposons $(A_n)_n$ croissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ et $\bigcap_{k \geq n} A_k = A_n$. D'où

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad \text{et} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Donc $(A_n)_n$ converge vers $\bigcup_n A_n$. On obtient le cas décroissant en passant au complémentaire. ■

Exemples 1.26.

- (1) Soient A et B deux parties d'un ensemble E .
Si $A_{2n} := A$ et $A_{2n+1} := B$ alors $\limsup_n A_n = A \cup B$ et $\liminf_n A_n = A \cap B$.
Si $A \neq B$ on a alors $\liminf_n A_n \subsetneq \limsup_n A_n$.
- (2) La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par $A_n :=]-2^{-n}, 2^{-n}[$ est décroissante et converge vers $\{0\}$;
celle définie par $A_n :=]-n, n[$ est croissante et converge vers $\mathbb{R}$.
- (3) Pour $A_n := [0, 1]$ si n est pair et $A_n := [1, 2]$ si n est impair, on a $\limsup_n A_n = [0, 2]$ et $\liminf_n A_n = \{1\}$.

1.2.2 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite réelle

Une suite réelle n'admet pas toujours de limite : les limites supérieures et inférieures existent en revanche toujours (elles valent éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

Définition 1.27. On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la *droite réelle achevée* (avec l'ordre naturel prolongeant celui de $\mathbb{R}$).

Remarque 1.28. Avec les conventions usuelles $\sup \emptyset := -\infty$ et $\inf \emptyset := +\infty$, toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Définitions 1.29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. On appelle respectivement *limite supérieure* et *limite inférieure* de $(u_n)_n$ les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ définis par

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k.$$

Remarque 1.30. On notera l'analogie avec les limites supérieure et inférieure d'une suite d'ensembles : $\sup$ joue le rôle de la réunion et $\inf$ celui de l'intersection. Cette relation sera précisée dans la Proposition 1.36.

Proposition 1.31. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. On pose $v_n := \sup_{k \geq n} u_k$ et $w_n := \inf_{k \geq n} u_k$. Alors

- (1) La suite $(v_n)_n$ est décroissante et la suite $(w_n)_n$ est croissante ;
- (2) $\limsup_n u_n = \lim_n v_n$ et $\liminf_n u_n = \lim_n w_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- (3) $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$.

Démonstration.

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\{u_k : k \geq n+1\} \subset \{u_k : k \geq n\}$, on a $v_{n+1} \leq v_n$. Donc $(v_n)_n$ est décroissante. Le cas $(w_n)_n$ est similaire.
- (2) D'après le théorème de convergence monotone, une suite croissante d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers sa borne supérieure et une suite décroissante d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers sa borne inférieure.
- (3) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et posons $p := \max(m, n)$. Alors $p \geq m$ et $p \geq n$, de sorte que

$$w_m = \inf_{k \geq m} u_k \leq u_p \leq \sup_{k \geq n} u_k = v_n.$$

En passant à la borne supérieure, on obtient $\sup_m w_m \leq v_n$, puis, en passant à la borne inférieure, on obtient $\sup_m w_m \leq \inf_n v_n$, c'est-à-dire $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$. ■

Proposition 1.32. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n$; dans ce cas

$$\lim_n u_n = \liminf_n u_n = \limsup_n u_n.$$

Démonstration. Posons $v_n := \sup_{k \geq n} u_k$ et $w_n := \inf_{k \geq n} u_k$ comme dans la proposition précédente.

⇐ Supposons $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n =: \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $v_n \rightarrow \ell$ et $w_n \rightarrow \ell$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq u_n \leq v_n$, on obtient $u_n \rightarrow \ell$.

⇒ Supposons que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Premier cas :* $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N$, $\ell - \varepsilon < u_k < \ell + \varepsilon$, d'où

$$\ell - \varepsilon \leq w_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\ell - \varepsilon \leq \liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n \leq \ell + \varepsilon$. On conclut en faisant tendre ε vers 0.

- *Deuxième cas :* $\ell = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N$, $u_k > M$, d'où $w_N \geq M$ puis $\liminf_n u_n = \sup_n w_n \geq M$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on obtient $\liminf_n u_n = +\infty$, et donc $\limsup_n u_n = +\infty$ (puisque $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$).
- *Troisième cas :* $\ell = -\infty$. Similaire au cas précédent. ■

Exemples 1.33.

- (1) Pour $u_n := (-1)^n$, on a $\limsup_n u_n = 1$ et $\liminf_n u_n = -1$: la suite ne converge pas.
- (2) Pour $u_n := (-1)^n n$, on a $\limsup_n u_n = +\infty$ et $\liminf_n u_n = -\infty$.
- (3) Pour $u_n := \frac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n = 0$: la suite converge vers 0.
- (4) Pour $u_n := \sin(n)$, on a $\limsup_n u_n = 1$ et $\liminf_n u_n = -1$.

Proposition 1.34. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$

- (1) Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\limsup_n u_n \leq \limsup_n v_n$ et $\liminf_n u_n \leq \liminf_n v_n$.
- (2) $\limsup_n (-u_n) = -\liminf_n u_n$ et $\liminf_n (-u_n) = -\limsup_n u_n$.
- (3) Pour $\lambda \in]0, +\infty[$, on a $\limsup_n (\lambda u_n) = \lambda \limsup_n u_n$ et $\liminf_n (\lambda u_n) = \lambda \liminf_n u_n$.
- (4) Lorsque les membres de droite sont bien définis,

$$\limsup_n (u_n + v_n) \leq \limsup_n u_n + \limsup_n v_n \quad \text{et} \quad \liminf_n (u_n + v_n) \geq \liminf_n u_n + \liminf_n v_n.$$

- (5) Si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\limsup_n (u_n + v_n) = \ell + \limsup_n v_n$ et $\liminf_n (u_n + v_n) = \ell + \liminf_n v_n$.
- (6) Si $(u_n)_n$ est croissante, alors $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n = \sup_n u_n$; si elle est décroissante, $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n = \inf_n u_n$.

Remarque 1.35. Les inégalités du point 4 peuvent être strictes : prendre $u_n := (-1)^n$ et $v_n := (-1)^{n+1}$, de sorte que $u_n + v_n = 0$ pour tout n , tandis que $\limsup_n u_n + \limsup_n v_n = 2$ et $\liminf_n u_n + \liminf_n v_n = -2$.

En utilisant la correspondance *ensembles* $\leftrightarrow$ *fonctions* donnée par les indicatrices, les limites inférieures et supérieures d'ensembles correspondent à des limites inférieures et supérieures de suites numériques. Via cette correspondance, la convergence d'une suite de parties correspond à la convergence simple de la suite des indicatrices...

Proposition 1.36. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E , alors

$$\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\liminf_n A_n} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n}.$$

En particulier, $(A_n)_n$ converge vers A si et seulement si $(\mathbb{1}_{A_n})_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_A$.

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{k \geq n} \mathbb{1}_{A_k}(x) = 1 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, x \in A_k \iff x \in \limsup_n A_n \iff \mathbb{1}_{\limsup_n A_n}(x) = 1. \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$. On montre de façon similaire que $\mathbb{1}_{\liminf_n A_n} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n}$.

Pour le dernier point, on utilise qu'une suite réelle converge si et seulement si ses limites inférieure et supérieure coïncident. ■

1.3 Cardinalité

La cardinalité formalise la notion de *nombre d'éléments* d'un ensemble, même lorsque celui-ci est infini. Les ensembles *dénombrables*²⁴, c'est-à-dire en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ joueront un rôle tout particulier dès la prochaine section du cours.

1.3.1 Ensembles finis

Définition 1.37. On dit qu'un ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection

$$f : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow E.$$

On note alors $|E| = n$ et on parle du *cardinal* de E .

Rappelons que $0 \in \mathbb{N}$ de sorte que $\{k \in \mathbb{N} : k < n\} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Commençons par démontrer que le cardinal d'un ensemble fini est unique.

Proposition 1.38. Soit E un ensemble fini. Si $|E| = n$ et $|E| = m$ alors $m = n$.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant.

Lemme 1.39. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. S'il existe une fonction injective $f : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow \{k \in \mathbb{N} : k < p\}$ alors $n \leq p$.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n .

- *Initialisation pour $n = 0$* : pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $n \leq p$.

- *Hérédité.* Supposons l'énoncé vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f : \{k \in \mathbb{N} : k < n+1\} \rightarrow \{k \in \mathbb{N} : k < p\}$ une fonction injective.

On définit $g : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow \{k \in \mathbb{N} : k < p-1\}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < f(n) \\ f(x) - 1 & \text{si } f(x) > f(n) \end{cases}$$

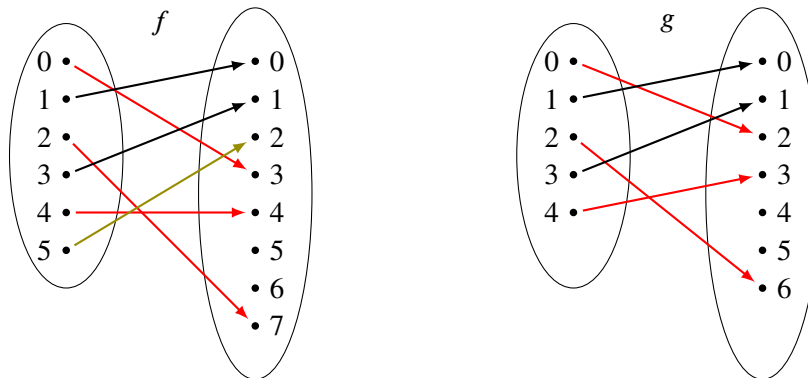


FIGURE : un exemple.

- * **Fait 1** : g est bien définie, i.e. $\forall x \in \{k \in \mathbb{N} : k < n\}, g(x) \in \{k \in \mathbb{N} : k < p-1\}$.

Soit $x \in \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$. Puisque f est injective, soit $f(x) < f(n)$ ou $f(x) > f(n)$.

Dans le premier cas, on a $g(x) = f(x) < f(n) < p$ d'où $0 \leq g(x) < p-1$.

Dans le deuxième cas, on a $f(x) > f(n)$ d'où $g(x) = f(x) - 1 < p-1$ et ainsi $0 \leq g(x) < p-1$.

- * **Fait 2** : g est injective.

Soient $x, y \in \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ tels que $g(x) = g(y)$.

- * **Premier cas** : $f(x), f(y) < f(n)$. Alors $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$.

Donc $f(x) = f(y)$ et $x = y$ puisque f est injective.

- * **Deuxième cas** : $f(x), f(y) > f(n)$. Alors $g(x) = f(x) - 1$ et $g(y) = f(y) - 1$.

Donc $f(x) = f(y)$ et $x = y$ puisque f est injective.

²⁴Avec cette convention, les ensembles finis sont dénombrables – on parlera d'ensemble *infini dénombrable* pour les ensembles ayant le cardinal de $\mathbb{N}$.

- * Troisième cas : $f(x) < f(n)$ et $f(y) > f(n)$.
Alors $g(x) = f(x) < f(n)$ et $g(y) = f(y) - 1 \geq f(n)$. Ce cas est ainsi impossible.
- * Quatrième cas : $f(y) < f(n)$ et $f(x) > f(n)$. Similaire au cas précédent.

Par hypothèse de récurrence, on obtient donc $n \leq p - 1$, i.e. $n + 1 \leq p$. ■

Démonstration de la Proposition 1.38. Supposons qu'il existe des bijections $f_1 : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow E$ et $f_2 : \{k \in \mathbb{N} : k < m\} \rightarrow E$.

Alors $f_2^{-1} \circ f_1 : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow \{k \in \mathbb{N} : k < m\}$ est bijective, d'où $n \leq m$ d'après le lemme précédent.

De même, $f_1^{-1} \circ f_2 : \{k \in \mathbb{N} : k < m\} \rightarrow \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ est une bijection et $m \leq n$.

Ainsi $n = m$. ■

Remarque 1.40. $|E| = 0 \Leftrightarrow E = \emptyset$

En effet, si $E = \emptyset$ alors $f : \{k \in \mathbb{N} : k < 0\} = \emptyset \rightarrow \emptyset = E$ est bijective, d'où $|E| = 0$.

Sinon, si $E \neq \emptyset$ alors $f : \{k \in \mathbb{N} : k < 0\} = \emptyset \rightarrow E$ n'est jamais surjective d'où $|E| \neq 0$.

Lemme 1.41. Si $E \subset F$ et si F est fini alors E est aussi fini; et de plus $|E| \leq |F|$.

Démonstration. Démontrons par récurrence sur $n = |F|$ que si $E \subset F$ alors E est fini et $|E| \leq n$.

- **Initialisation au rang $n = 0$:** alors $F = \emptyset$, donc forcément $E = \emptyset$ et $|E| = 0$.
- **Hérédité.** Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Soit F un ensemble tel que $|F| = n + 1$.

* **Premier cas :** $E = F$. Alors E est fini et $|E| = |F| = n + 1$.

* **Deuxième cas :** $E \neq F$. Alors il existe $x \in F \setminus E$.

Alors, il existe une bijection $f : \{k \in \mathbb{N} : k < n + 1\} \rightarrow F$.

Puisque f est bijective, il existe un unique $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ tel que $f(m) = x$.

Définissons $g : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow F \setminus \{x\}$ par $g(k) = f(k)$ pour $k \neq m$ et $g(m) = f(n)$ pour $m \neq n$.

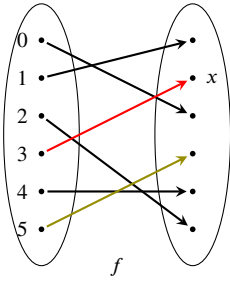


FIG. : Si $m \neq n$, i.e. $f(n) \neq x$

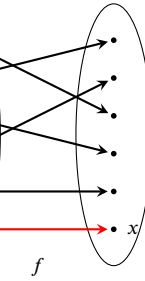
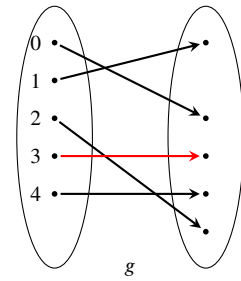
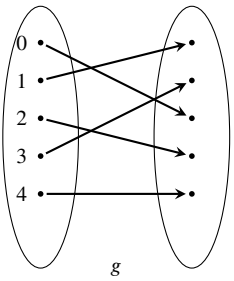


FIG. : Si $m = n$, i.e. $f(n) = x$



Alors g est bijective, de sorte que $F \setminus \{x\}$ est fini et $|F \setminus \{x\}| = n$.

Puisque $E \subset F \setminus \{x\}$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que E est fini et que $|E| \leq n < n + 1$. ■

Proposition 1.42. Soient $E \subset F$ avec F fini. Alors E et $F \setminus E$ sont finis; et de plus $|F| = |E| + |F \setminus E|$.

Démonstration. Puisque $F \setminus E \subset F$ et $E \subset F$, on déduit que E et $F \setminus E$ sont finis d'après le Lemme 1.41. Posons $r := |E|$ et $s := |F \setminus E|$.

Alors il existe des bijections $f : \{k \in \mathbb{N} : k < r\} \rightarrow E$ et $g : \{k \in \mathbb{N} : k < s\} \rightarrow F \setminus E$.

Définissons $h : \{k \in \mathbb{N} : k < r + s\} \rightarrow F$ par $h(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k < r \\ g(k - r) & \text{si } k \geq r \end{cases}$.

- **Fait 1 :** h est bien définie.

Si $0 \leq k < r$ alors $f(k)$ est bien défini et $f(k) \in E \subset F$.

Si $r \leq k < r + s$ alors $0 \leq k - r < s$ de sorte que $g(k - r)$ est bien défini et $g(k - r) \in F \setminus E \subset F$.

- **Fait 2 :** h est une bijection.

- * Montrons que h est injective. Soient $x, y \in \{0, 1, \dots, r + s - 1\}$ tels que $h(x) = h(y)$.
Si $h(x) = h(y) \in E$ alors $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$ d'où $x = y$ puisque f est injective.
Si $h(x) = h(y) \in F \setminus E$ alors $g(x - r) = h(x) = h(y) = g(y - r)$ d'où $x - r = y - r$ puisque g est injective, et ainsi $x = y$.
- * Montrons que h est surjective. Soit $y \in F$.
Si $y \in E$ alors il existe $x \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$ tel que $f(x) = y$, puisque f est surjective. D'où $h(x) = f(x) = y$.
Si $y \in F \setminus E$ alors il existe $x \in \{0, 1, \dots, s - 1\}$ tel que $g(x) = y$, puisque g est surjective. D'où $h(x + r) = g(x) = y$.

Ainsi $|F| = r + s = |E| + |F \setminus E|$. ■

Proposition 1.43. Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \cup F$ et $E \times F$ le sont aussi, et de plus

- (1) $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$
- (2) $|E \times F| = |E| \cdot |F|$

Démonstration.

- (1) Puisque $F \setminus (E \cap F) \subset F$, on déduit de la Proposition 1.42 que $F \setminus (E \cap F)$ est fini avec $|F \setminus (E \cap F)| = |F| - |E \cap F|$.
Notons $r := |E|$ et $s := |F \setminus (E \cap F)| = |F| - |E \cap F|$ alors il existe des bijections $f : \{k \in \mathbb{N} : k < r\} \rightarrow E$ et $g : \{k \in \mathbb{N} : k < s\} \rightarrow F \setminus (E \cap F)$. On définit $h : \{k \in \mathbb{N} : k < r + s\} \rightarrow E \cup F$ par $h(k) := f(k)$ si $k < r$ et $h(k) := g(k - r)$ sinon. On vérifie que h est bien définie et bijective, de sorte que $|E \cup F| = r + s = |E| + |F| - |E \cap F|$.

- (2) Montrons par récurrence sur $n = |F| \in \mathbb{N}$ que si E est fini alors $E \times F$ aussi avec $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

- *Initialisation au rang $n = 0$.* Alors $F = \emptyset$ et donc $E \times F = \emptyset$ aussi. De plus $|E| \times |F| = |E| \cdot 0 = 0 = |E \times F|$.
- *Démontrons aussi le rang $n = 1$ puisqu'il servira dans l'hérédité.*
Supposons que $F = \{*\}$ et $|E| = p$. Alors il existe une bijection $f : \{k \in \mathbb{N} : k < p\} \rightarrow E$.
Définissons $g : \{k \in \mathbb{N} : k < p\} \rightarrow E \times F$ par $g(k) = (f(k), *)$, alors g est bijective.
Ainsi $|E \times F| = p = p \times 1 = |E| \times |F|$.
- *Hérédité.* Supposons l'énoncé vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Soit F un ensemble tel que $|F| = n + 1$.
Puisque $|F| > 0$, il existe $x \in F$, d'où $|F \setminus \{x\}| = |F| - |\{x\}| = n + 1 - 1 = n$. Alors

$$\begin{aligned}
 |E \times F| &= |(E \times (F \setminus \{x\})) \sqcup (E \times \{x\})| \\
 &= |E \times (F \setminus \{x\})| + |E \times \{x\}| \\
 &= |E| \cdot |F \setminus \{x\}| + |E| \text{ par hypothèse de récurrence et par le cas } n = 1 \\
 &= |E| \cdot (|F| - 1) + |E| \\
 &= |E| \cdot |F|.
 \end{aligned}$$

■

Proposition 1.44. Soient $E \subset F$ avec F fini. Alors $E = F \Leftrightarrow |E| = |F|$.

Démonstration. Si $E = F$ alors il n'y a rien à démontrer.

Si $|E| = |F|$, alors $|F \setminus E| = |F| - |E| = 0$, donc $F \setminus E = \emptyset$, i.e. $E = F$. ■

Proposition 1.45. Soient E et F deux ensembles. Supposons E fini. Alors il existe une bijection $f : E \rightarrow F$ si et seulement si F est fini avec $|E| = |F|$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.

Par hypothèse, il existe une bijection $\varphi : \{k \in \mathbb{N} : k < |E|\} \rightarrow E$.

Donc $f \circ \varphi : \{k \in \mathbb{N} : k < |E|\} \rightarrow F$ est bijective et ainsi F est fini avec $|F| = |E|$. $\Leftarrow$ Supposons F fini avec $|E| = |F| =: n$.

Alors il existe des bijections $\varphi : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow E$ et $\psi : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow F$.

Ainsi $f = \psi \circ \varphi^{-1} : E \rightarrow F$ est bijective. ■

Proposition 1.46. Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$. Soit $f : E \rightarrow F$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (1) f est injective,
- (2) f est surjective,
- (3) f est bijective.

Démonstration.

Supposons que f est injective. Par hypothèse, il existe $\varphi : \{k \in \mathbb{N} : k < |E|\} \rightarrow E$.

Alors $f \circ \varphi : \{k \in \mathbb{N} : k < |E|\} \rightarrow f(E)$ est bijective, d'où $|f(E)| = |E| = |F|$.

Puisque $f(E) \subset F$ et $|f(E)| = |F|$, on obtient $f(E) = F$, i.e. f est surjective.

Supposons que f est surjective.

Pour chaque $y \in F$, $f^{-1}(y) \subset E$ est fini et non vide, d'où $|f^{-1}(y)| \geq 1$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in F$ tel que $|f^{-1}(y)| > 1$.

Alors $|E| = \left| \bigsqcup_{y \in F} f^{-1}(y) \right| = \sum_{y \in F} |f^{-1}(y)| > |F| = |E|$. D'où une contradiction. ■

Proposition 1.47. Soient E et F deux ensembles finis. Alors $|E| \leq |F|$ si et seulement s'il existe une injection $f : E \rightarrow F$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons $|E| \leq |F|$.

Il existe des bijections $\varphi : \{k \in \mathbb{N} : k < |E|\} \rightarrow E$ et $\psi : \{k \in \mathbb{N} : k < |F|\} \rightarrow F$.

Puisque $|E| \leq |F|$, $f = \psi \circ \varphi^{-1} : E \rightarrow F$ est bien définie et injective.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $f : E \rightarrow F$ injective.

Alors f induit une bijection $f : E \rightarrow f(E)$, de sorte que $|E| = |f(E)|$.

Puisque $f(E) \subset F$, on obtient de plus que $|f(E)| \leq |F|$. ■

Corollaire 1.48 (Principe des tiroirs de Dirichlet).

Soient E et F deux ensembles finis. Si $|E| > |F|$ alors il n'existe pas de fonction injective $E \rightarrow F$.

Remarque 1.49 (Principe de trichotomie, version finie). Puisque le cardinal d'un ensemble fini est un entier naturel, on obtient qu'étant donnés deux ensembles finis E et F , alors exactement un des énoncés suivants est vrai :

- $|E| < |F|$ (i.e. il existe une injection $E \rightarrow F$ mais pas de bijection $E \rightarrow F$),
- $|E| = |F|$ (i.e. il existe une bijection $E \rightarrow F$),
- $|E| > |F|$ (i.e. il existe une injection $F \rightarrow E$ mais pas de bijection $E \rightarrow F$).

1.3.2 Généralisations aux ensembles infinis

Définition 1.50. On dit qu'un ensemble est *infini* s'il n'est pas fini.

Théorème 1.51. $\mathbb{N}$ est infini.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\mathbb{N}$ est fini. Puisque $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est fini aussi.

On définit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $f(n) = n + 1$. Alors f est bijective de réciproque $f^{-1} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f^{-1}(n) = n - 1$.

Donc $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}| - |\{0\}| = |\mathbb{N}| - 1$, i.e. $0 = 1$. D'où une contradiction. ■

Définition 1.52. On dit que deux ensembles E et F ont même *cardinal* (ou qu'ils sont *équipotents*) s'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$, on note alors $|E| = |F|$.

On remarquera que cette définition est compatible avec celle des ensembles finis.

La proposition suivante montre que l'équipotence est une relation d'équivalence sur la classe²⁵ des ensembles.

²⁵Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles, voir le Théorème 1.76 : la notion de classe généralise celle d'ensemble et la classe de tous les ensembles est bien définie.

Proposition 1.53.

- (1) Pour tout ensemble E , on a $|E| = |E|$.
- (2) Étant donnés E et F deux ensembles, si $|E| = |F|$ alors $|F| = |E|$.
- (3) Étant donnés E , F et G trois ensembles, si $|E| = |F|$ et $|F| = |G|$ alors $|E| = |G|$.

Démonstration.

- (1) $id : E \rightarrow E$ est une bijection.
- (2) Supposons que $|E| = |F|$, i.e. qu'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.
Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est une bijection, d'où $|F| = |E|$.
- (3) Supposons que $|E| = |F|$ et $|F| = |G|$, i.e. qu'il existe des bijections $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.
Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est une bijection, d'où $|E| = |G|$. ■

Théorème 1.54. Un ensemble E est infini si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $S \subset E$ fini tel que $|S| = n$.

Démonstration.

⇒ Supposons E infini et montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists S \in \mathcal{P}(E)$, $|S| = n$.

- Initialisation au rang $n = 0$: $\emptyset \subset E$ vérifie $|\emptyset| = 0$.
- Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe $T \subset E$ vérifiant $|T| = n$.
Remarquons que $E \setminus T \neq \emptyset$ (sinon on aurait $E = T$, ce qui est impossible puisque E est infini et T est fini).

Ainsi, il existe $x \in E \setminus T$. Posons $S := T \sqcup \{x\}$, alors $S \subset E$ est fini et $|S| = |T| + 1 = n + 1$.

⇐ Soit E un ensemble tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists S \in \mathcal{P}(E)$, $|S| = n$.

Supposons par l'absurde que E est fini alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|E| = k$.

Par hypothèse, il existe $S \subset E$ tel que $|S| = k + 1$.

Puisque $S \subset E$, on a $k + 1 = |S| \leq |E| = k$, d'où une contradiction. ■

Corollaire 1.55. Un ensemble E est infini ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une injection $\{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow E$.

Définition 1.56. Soient E et F deux ensembles. On note $|E| \leq |F|$ s'il existe une injection $E \rightarrow F$.

Le théorème suivant énonce que s'il existe deux injections $E \rightarrow F$ et $F \rightarrow E$ alors il existe une bijection $E \rightarrow F$. Il a d'abord été énoncé en 1887 par Cantor, sans démonstration. La première démonstration est due à Dedekind²⁶ la même année, mais ce dernier ne l'a pas publiée (elle a été retrouvée après son décès). En 1895, Cantor publie une démonstration utilisant le principe de trichotomie²⁷, dont Hartogs a démontré en 1915 qu'il est équivalent à l'axiome du choix²⁸. D'autres démonstrations ont été obtenues sans l'axiome du choix, à la fin du XIX^e siècle par Bernstein, Schröder (qui s'est avérée erronée) et Dedekind (une autre, encore une fois publiée post-mortem) puis plus tard par Zermelo (1901, 1908) et König (1906). La démonstration présentée ci-dessous est celle de König.

Théorème 1.57 (Théorème de Cantor–Schröder–Bernstein).

Soient E et F deux ensembles. Si $|E| \leq |F|$ et $|F| \leq |E|$ alors $|E| = |F|$.

Démonstration. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux fonctions injectives. Posons

- $E_E := \{x \in E : \exists n \in \mathbb{N}, \exists r \in E \setminus \text{Im}(g), x = (g \circ f)^n(r)\}$,
- $E_F := \{x \in E : \exists n \in \mathbb{N}, \exists s \in F \setminus \text{Im}(f), x = g((f \circ g)^n(s))\}$,
- $E_\infty := E \setminus (E_E \sqcup E_F)$,
- $F_E := \{y \in F : \exists n \in \mathbb{N}, \exists r \in E \setminus \text{Im}(g), y = f((g \circ f)^n(r))\}$,
- $F_F := \{y \in F : \exists n \in \mathbb{N}, \exists s \in F \setminus \text{Im}(f), y = (f \circ g)^n(s)\}$ et
- $F_\infty := F \setminus (F_E \sqcup F_F)$.

²⁶**TODO** : Rédiger petite note sur la correspondance entre Cantor et Dedekind, citer Noether.

²⁷Ce dernier stipule que la Remarque 1.49 se généralise à des ensembles quelconques.

²⁸L'axiome du choix stipule que si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles non vides alors $\prod_{i \in I} E_i \neq \emptyset$; il admet de nombreux énoncés équivalents. Il est aussi équivalent au lemme de Zorn, à l'existence de bases pour les espaces vectoriels (de dimensions quelconques) ou encore au Théorème de Krull que vous verrez dans le cours sur la théorie des anneaux.

Remarquons que si $x \in E_E$ alors $f(x) \in F_E$. Donc $f|_{E_E} : E_E \rightarrow F_E$ est bien définie et est injective (puisque f l'est). Elle est aussi surjective, donc bijective, par construction.

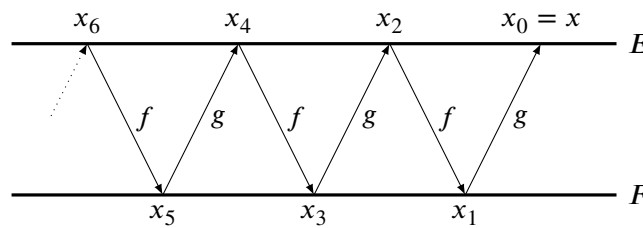
De même, $g|_{F_F} : F_F \rightarrow E_F$ et $f|_{E_\infty} : E_\infty \rightarrow F_\infty$ sont bijectives.

On montre ensuite aisément que la fonction $h : E \rightarrow F$ définie par $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E_E \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in E_F \\ f(x) & \text{si } x \in E_\infty \end{cases}$ est bijective. ■

La démonstration précédente n'étant pas très parlante, détaillons-la. Étant donné $x \in E$, on construit par récurrence $x_0, x_1, x_2, \dots$, alternativement dans E et dans F , de la façon suivante.

On pose $x_0 := x$, puis

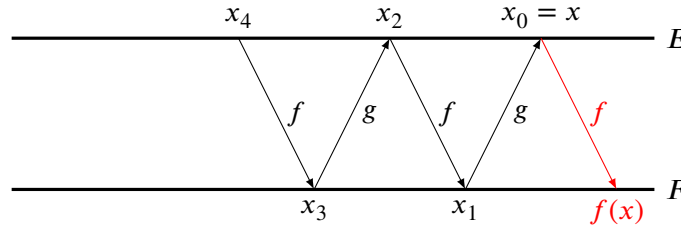
- si $x_n \in E$ alors on définit $x_{n+1} \in F$ comme l'unique antécédent de x_n par g (s'il existe, sinon on s'arrête à x_n),
- si $x_n \in F$ alors on définit $x_{n+1} \in E$ comme l'unique antécédent de x_n par f (s'il existe, sinon on s'arrête à x_n).



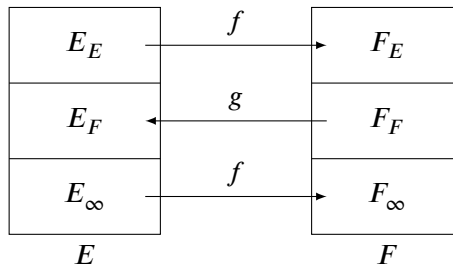
- Soit la suite termine avec un élément dans E et on dit alors que $x \in E_E$,
- Soit la suite termine avec un élément dans F et on dit alors que $x \in E_F$,
- Soit la suite est infinie et on dit alors que $x \in E_\infty$.

On obtient ainsi une partition $E = E_E \sqcup E_F \sqcup E_\infty$, et on réalise la même chose pour $x_0 \in F$ de sorte à obtenir $F = F_E \sqcup F_F \sqcup F_\infty$.

Si $x \in E_E$, disons que la construction s'arrête à x_4 dans le schéma ci-dessous, alors $f(x) \in F_E$.



On obtient donc une bijection $f|_{E_E} : E_E \rightarrow F_E$. Et de même pour $g|_{F_F} : F_F \rightarrow E_F$ et $f|_{E_\infty} : E_\infty \rightarrow F_\infty$. Enfin, on recolle ces bijections de la façon suivante pour obtenir une bijection $h : E \rightarrow F$.



On en déduit que $\leq$ est une relation d'ordre sur la classe des cardinaux.

Proposition 1.58.

- (1) Si E est un ensemble alors $|E| \leq |E|$.
- (2) Étant donnés E et F deux ensembles, si $|E| \leq |F|$ et $|F| \leq |E|$ alors $|E| = |F|$.
- (3) Étant donnés trois ensembles E , F et G , si $|E| \leq |F|$ et $|F| \leq |G|$ alors $|E| \leq |G|$.

Démonstration.

- (1) $\text{id} : E \rightarrow E$ est injective.
- (2) C'est exactement le théorème de Cantor–Schröder–Bernstein.
- (3) Supposons $|E| \leq |F|$ et $|F| \leq |G|$, i.e. qu'il existe des injections $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.
Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est injective, d'où $|E| \leq |G|$. ■

Proposition 1.59. Si $E \subset F$ alors $|E| \leq |F|$.

Démonstration. En effet, $f : E \rightarrow F$ définie par $f(x) = x$ est injective. ■

Remarque 1.60. Attention, contrairement au cas fini, on peut avoir $|E| = |F|$ même si $E \subsetneq F$.
Par exemple avec $E := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $F := \mathbb{N}$.

Proposition 1.61. Si $|E_1| = |E_2|$ et $|F_1| = |F_2|$ alors $|E_1 \times F_1| = |E_2 \times F_2|$.

Démonstration. Supposons que $|E_1| = |E_2|$ et $|F_1| = |F_2|$, i.e. qu'il existe des bijections $f : E_1 \rightarrow E_2$ et $g : F_1 \rightarrow F_2$.

Définissons $h : E_1 \times F_1 \rightarrow E_2 \times F_2$ par $h(x, y) = (f(x), g(y))$.

- *h est injective.*
Soient $(x, y), (x', y') \in E_1 \times F_1$ tels que $h(x, y) = h(x', y')$.
Alors $f(x) = f(x')$ et $g(y) = g(y')$, d'où $x = x'$ et $y = y'$ puisque f et g sont injectives.
Ainsi $(x, y) = (x', y')$.
- *h est surjective.*
Soit $(z, w) \in E_2 \times F_2$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E_1$ tel que $z = f(x)$.
De même, puisque g est surjective, il existe $y \in F_1$ tel que $w = g(y)$.
Alors $h(x, y) = (f(x), g(y)) = (z, w)$.

Donc h est bijective et $|E_1 \times F_1| = |E_2 \times F_2|$. ■

Proposition 1.62. Soient E et F deux ensembles. On suppose $E \neq \emptyset$ ²⁹. Alors $|E| \leq |F|$ si et seulement s'il existe une surjection $g : F \rightarrow E$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons que $|E| \leq |F|$, i.e. qu'il existe une injection $f : E \rightarrow F$, alors $\tilde{f} : E \rightarrow f(E)$ est bijective.

Soit $u \in E$. On définit $g : F \rightarrow E$ par $g(y) = \begin{cases} \tilde{f}^{-1}(y) & \text{si } y \in f(E) \\ u & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $x \in E$ alors $g(f(x)) = \tilde{f}^{-1}(f(x)) = x$. Donc g est surjective.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe une surjection $g : F \rightarrow E$, alors³⁰ pour tout $x \in E$, il existe $y_x \in g^{-1}(x)$.

Définissons $f : E \rightarrow F$ par $f(x) = y_x$. Montrons que f est injective de sorte que $|E| \leq |F|$.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mais $g(f(x)) = g(y_x) = x$ et $g(f(x')) = x'$.
Donc $x = x'$. ■

Théorème 1.63. Soient E et F deux ensembles. Si $|E| = |F|$ alors $|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}(F)|$.

Démonstration. Soient E et F deux ensembles tels que $|E| = |F|$, alors il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.

Remarquons que $\tilde{f} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ définie par $\tilde{f}(A) = f(A)$ est bijective, ainsi $|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}(F)|$. ■

²⁹Cette condition est importante pour le sens direct : si $E = \emptyset$ alors $|E| \leq |F|$ mais $E^F = \emptyset$ dès lors que $F \neq \emptyset$.

³⁰On utilise ici l'axiome du choix et montre plus précisément qu'une surjection admet une section – c'est un autre énoncé équivalent à l'axiome du choix.

1.3.3 Ensembles dénombrables

On note $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ (que l'on prononce *aleph zéro*, ou *aleph nought* en anglais).

Définition 1.64. Un ensemble E est *dénombrable* s'il est fini ou si $|E| = \aleph_0$.

On dit que E est *infini dénombrable* si $|E| = \aleph_0$.

Proposition 1.65. Si $S \subset \mathbb{N}$ est infini alors $|S| = \aleph_0$.

Démonstration. Commençons par définir $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ par récurrence comme suit.

On pose $f(0) := \min S$ (qui est bien défini puisque $S \neq \emptyset$ et que $\mathbb{N}$ est bien ordonné).

Puis $f(n+1) := \min\{k \in S : k > f(n)\}$ (qui est encore une fois bien défini puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné et que l'ensemble est non vide – sinon S serait fini).

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f(n)$, f est injective et $\aleph_0 \leq |S|$. Comme $S \subset \mathbb{N}$, on a aussi $|S| \leq \aleph_0$.

On conclut donc que $|S| = \aleph_0$ grâce au théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

Proposition 1.66. Un ensemble E est dénombrable si et seulement si $|E| \leq \aleph_0$ (i.e. s'il existe une injection $f : E \rightarrow \mathbb{N}$). Dit autrement, un ensemble dénombrable est un ensemble équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Démonstration.

⇒ Supposons que E soit dénombrable.

- Si E est fini alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $g : \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \rightarrow E$.

Alors $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(x) = g^{-1}(x)$ est injective.

- Si $|E| = \aleph_0$ alors il existe une bijection $f : E \rightarrow \mathbb{N}$.

⇐ Supposons qu'il existe une injection $f : E \rightarrow \mathbb{N}$.

Supposons que E est infini alors $|E| = |f(E)| = \aleph_0$ par la Proposition 1.65.

Donc soit E est fini, soit $|E| = \aleph_0$. Ainsi E est dénombrable. ■

Proposition 1.67. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est infini dénombrable,

i.e. $|\{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \exists n \in \mathbb{N}, |S| = n\}| = \aleph_0$.

Démonstration. On définit $f : \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \exists n \in \mathbb{N}, |S| = n\} \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(S) = \sum_{k \in S} 2^k$.

Alors f est bijective par existence et unicité de la représentation binaire des entiers naturels. ■

Proposition 1.68. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$

Démonstration. On définit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(a, b) := 2^a 3^b$, alors f est injective par unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers, ainsi $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq \aleph_0$.

De plus, $\{0\} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d'où $\aleph_0 = |\{0\} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Donc $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ par le théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

Théorème 1.69. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, i.e. si I est dénombrable et si pour tout $i \in I$, E_i est dénombrable alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $I \subset \mathbb{N}$.

Soit $i \in I$. Puisque E_i est dénombrable, il existe une injection $f_i : E_i \rightarrow \mathbb{N}$.³¹

On définit $\varphi : \bigcup_{i \in I} E_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $\varphi(x) := (n, f_n(x))$ où $n = \min\{i \in I : x \in E_i\}$ est bien défini puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné. On vérifie alors que φ est injective, ce qui permet de conclure. ■

Théorème 1.70. Si E est un ensemble infini alors il existe $T \subset E$ tel que $|T| = \aleph_0$, i.e. $\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n := \{S \in \mathcal{P}(E) : |S| = n\}$. D'après le Théorème 1.54, $E_n \neq \emptyset$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut fixer $S_n \in E_n$.³²

Alors $T := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ est dénombrable d'après le Théorème 1.69.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \subset T$ et $|S_n| = n$. Ainsi T est infini d'après le Théorème 1.54.

Donc $|T| = \aleph_0$ puisqu'il est infini dénombrable. ■

³¹On utilise l'axiome du choix dénombrable pour choisir simultanément f_i pour $i \in I$.

³²On utilise encore une fois l'axiome du choix dénombrable, et on l'utilise aussi ensuite pour obtenir qu'une union dénombrable de dénombrables est dénombrable – sans l'axiome du choix dénombrable, c'est plus délicat puisque Cohen a construit en 1963 (en s'inspirant de travaux de Fraenkel en 1922) un modèle de ZF admettant un ensemble infini incomparable avec $\aleph_0$.

Théorème 1.71. $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

Première démonstration. Puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, on a $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$.

Définissons $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(n) := \begin{cases} 2^n & \text{si } n \geq 0 \\ 3^{-n} & \text{si } n < 0 \end{cases}$. Alors f est injective d'après l'unicité de la décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers, d'où $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$.

On obtient $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ par le théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

Seconde démonstration.

Définissons $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(n) := \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -(2n+1) & \text{si } n < 0 \end{cases}$.

Alors f est bijective de réciproque $f^{-1}(m) = \begin{cases} k & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, m = 2k \\ -k-1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, m = 2k+1 \end{cases}$, d'où $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. ■

Théorème 1.72. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

Première démonstration. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ d'où $\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}|$.

Définissons $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f\left(\frac{a}{b}\right) = (a, b)$ où $\frac{a}{b}$ est irréductible avec $b > 0$ alors f est bien définie et injective. Donc $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$.

Puisque $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, on en déduit que $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

On conclut à l'aide du théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

Deuxième démonstration. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ d'où $\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}|$.

La fonction $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(a, b) = \frac{a}{b}$ est surjective.

Donc, d'après la Proposition 1.62³³, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})|$.

Puisque $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ et $|\mathbb{N} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}|$, on obtient $|\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

On conclut à l'aide du théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

Troisième démonstration. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ d'où $\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}|$.

De plus $\mathbb{Q} = \bigcup_{(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})} \left\{ \frac{a}{b} \right\}$, donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable d'après le Théorème 1.69³⁴, i.e. $|\mathbb{Q}| \leq \aleph_0$.

On conclut à l'aide du théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

1.3.4 L'argument diagonal de Cantor**Théorème 1.73.** $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$

Démonstration. Nous montrons qu'il n'y a pas de surjection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ admet une unique écriture décimale propre³⁵

$$f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{nk} 10^{-k}$$

où $a_{n0} \in \mathbb{Z}$ et $a_{nk} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour $k \geq 1$, i.e.

$$\begin{aligned} f(0) &= a_{00} . a_{01} a_{02} a_{03} a_{04} a_{05} \dots \\ f(1) &= a_{10} . a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \dots \\ f(2) &= a_{20} . a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} \dots \\ f(3) &= a_{30} . a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} \dots \\ f(4) &= a_{40} . a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} \dots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

³³En fait, on a seulement besoin d'une version plus faible de Proposition 1.62 qui n'utilise pas l'axiome du choix mais seulement le fait que $\mathbb{N}$ est bien ordonné pour montrer qu'une fonction surjective définie sur $\mathbb{N}$ admet une section.

³⁴Encore une fois, l'axiome du choix n'est pas nécessaire ici puisque les ensembles sont des singletons.

³⁵i.e. qui ne termine pas par une infinité de 9.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $b_k := \begin{cases} 1 & \text{si } a_{kk} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $b = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ est un nombre réel représenté par son écriture décimale propre.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $b \neq f(n)$ puisque $b_n \neq a_{nn}$ (on utilise l'unicité de l'écriture décimale propre). Ainsi $b \notin \text{Im}(f)$ et f n'est pas surjective. ■

L'argument de la démonstration précédente s'appelle *argument diagonal* (de Cantor) qu'il a utilisé comme ci-dessus en 1891 pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (il avait obtenu une première démonstration en 1874³⁶). C'est un argument très général qui permet de démontrer de nombreux résultats (par exemples, que la topologie boîte sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'a pas de bases dénombrables de voisinages, ou que si E est un espace vectoriel réel de dimension infinie alors E n'est jamais isomorphe à son dual E^* à partir du théorème d'Erdős–Kaplansky qui stipule qu'alors $\dim E^* = |E^*|$). On l'utilise dès à présent pour démontrer le prochain théorème.

Théorème 1.74 (Théorème de Cantor). *Pour tout ensemble E , on a $|E| < |\mathcal{P}(E)|$.*

Démonstration. Puisque $g : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $g(x) = \{x\}$ est injective, on a $|E| \leq |\mathcal{P}(E)|$.

Montrons qu'il n'y a pas de surjection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Soit $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une fonction. On définit $S := \{x \in E : x \notin f(x)\}$.

Soit $x \in E$. Si $x \in f(x)$ alors $x \notin S$. Sinon, si $x \notin f(x)$, alors $x \in S$. Ainsi $f(x) \neq S$.

Donc $S \notin \text{Im}(f)$ et f n'est pas surjective. ■

Nous avons déjà vu que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ et $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. On va montrer que $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Théorème 1.75. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Démonstration. Définissons $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(S) = \sum_{n \in S} 10^{-n}$.

Alors f est injective par unicité du développement décimal propre, d'où $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

Définissons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ par $g(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$.

Alors g est injective. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x < y$, alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Donc $q \notin g(x)$ mais $q \in g(y)$. Ainsi $g(x) \neq g(y)$.

Donc $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ d'après le Théorème 1.63 puisque $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

On conclut grâce au théorème de Cantor–Schröder–Bernstein. ■

Théorème 1.76. *Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'un tel ensemble V existe, alors $\mathcal{P}(V) \subset V$ par définition de V , d'où $|\mathcal{P}(V)| \leq |V|$. D'où une contradiction avec le théorème de Cantor. ■

Théorème 1.77. *Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les singletons.*

Démonstration. Supposons qu'un tel ensemble S existe et définissons $f : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$ par $f(x) = \{x\}$. Puisque f est injective, on obtient $|\mathcal{P}(S)| \leq |S|$. D'où une contradiction avec le théorème de Cantor. ■

³⁶TODO : Ajouter note sur la correspondance avec Dedekind

Exercices

Exercice 1.1. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

- (1) Simplifier $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.
- (2) Simplifier $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (3) A-t-on toujours $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$?
- (4) (a) Montrer que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- (b) Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 1.2. Soit E un ensemble.

- (1) Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
- (2) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = A \cup B \implies A = B$.

Exercice 1.3. Soit E un ensemble.

On rappelle que pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ désigne la *différence symétrique*.

- (1) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- (2) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \Delta B)^c = A^c \Delta B = A \Delta B^c$.
- (3) Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
- (4) Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- (5) Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ si et seulement si x appartient à un nombre impair de A_i .
- (6) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \Delta B = C \Delta D$ si et seulement si $A \Delta C = B \Delta D$.

Exercice 1.4. Démontrer les relations de la Proposition 1.12.

Exercice 1.5. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- (1) Montrer que les inclusions suivantes de la Proposition 1.12 peuvent être strictes.
 - (a) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E), f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
 - (b) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$;
 - (c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$;
 - (d) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- (2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est injective ;
 - (ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E), f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
 - (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$;
 - (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)$.
- (3) (a) Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f)$.
- (b) En déduire que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
- (4) Soit $A \subset E$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
 - (i) $\exists B \in \mathcal{P}(F), A = f^{-1}(B)$;
 - (ii) $f^{-1}(f(A)) = A$;
 - (iii) $f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)$;
 - (iv) $\mathbb{1}_A$ est constante sur chaque fibre de f ;
 - (v) Il existe $g : F \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\mathbb{1}_A = g \circ f$.
 Une telle partie A est dite *saturée* pour f .

Exercice 1.6. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

- (1) Montrer que $\forall C \in \mathcal{P}(G), (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
- (2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F), (f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 1.7. On rappelle qu'une *partition* d'un ensemble E est une famille $(S_i)_{i \in I}$ de parties non vides de E deux à deux disjointes telle que $E = \bigsqcup_{i \in I} S_i$. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- (1) Montrer que si $(B_i)_{i \in I}$ est une partition de F alors les $f^{-1}(B_i)$ non vides forment une partition de E .
- (2) L'énoncé analogue reste-t-il vrai pour l'image directe ?

Exercice 1.8. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

- (1) Exprimer $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}$ et $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ en termes de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
- (2) Traduire en termes d'indicatrices les énoncés suivants : $A \subset B$; $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = E$; $B = E \setminus A$.
- (3) Traduire en termes d'ensembles les énoncés suivants : $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \leq 1$; $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C = 1$; $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C = 0$; $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C$.

Exercice 1.9. Soient E un ensemble, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ et $A_1, \dots, A_n$ des parties de E deux à deux disjointes telles que $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = E$. On pose $f := \sum_{k=1}^n y_k \mathbb{1}_{A_k}$.

- (1) Montrer que f prend au plus n valeurs.
- (2) On suppose que $f = \sum_{l=1}^m z_l \mathbb{1}_{B_l}$ est une seconde écriture du même type de f .
Montrer que $\forall k, l, A_k \cap B_l \neq \emptyset \implies y_k = z_l$.

Exercice 1.10 (Formule du crible ou d'inclusion-exclusion).

Soient E un ensemble et $A_1, \dots, A_n$ des parties de E .

- (1) Montrer que $\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.
- (2) En déduire que $\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \mathbb{1}_{\bigcap_{j \in J} A_j}$.
- (3) On suppose E fini. Montrer la *formule du crible* (aussi appelée *formule d'inclusion-exclusion*)

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

- (4) Application : combien d'entiers entre 1 et 1000 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5?

Exercice 1.11. Déterminer $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans chacun des cas suivants, et dire si la suite converge.

- (1) La suite de parties de $\mathbb{R}$ définie par $A_n := \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right]$.
- (2) La suite de parties de $\mathbb{R}$ définie par $A_n := \left]-\frac{1}{n+1}, 1\right[$ si n est impair et $A_n := \left]-1, \frac{1}{n+1}\right[$ si n est pair.
- (3) La suite de parties de $\mathbb{N}$ définie par $A_n := \{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : k \text{ divise } n\}$, $n \geq 1$.
- (4) La suite de parties de $\mathbb{Z}$ définie par $A_n := n\mathbb{Z}$.
- (5) La suite de parties de $\mathbb{Q}$ définie par $A_n := \left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $n \geq 1$.

Exercice 1.12. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de parties d'un ensemble E .

- (1) Montrer que $\limsup_n (A_n \cup B_n) = \limsup_n A_n \cup \limsup_n B_n$.
- (2) (a) Montrer que $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset \limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n$.
(b) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- (3) Énoncer et démontrer les résultats correspondants pour $\liminf$.
- (4) On suppose que $(A_n)_n$ converge vers A et $(B_n)_n$ vers B . Montrer que $(A_n \cup B_n)_n$, $(A_n \cap B_n)_n$ et $(A_n \Delta B_n)_n$ convergent respectivement vers $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \Delta B$.

Exercice 1.13. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E .

Montrer que $(A_n)_n$ converge vers A si et seulement si $A_n \Delta A$ converge vers $\emptyset$.

Exercice 1.14. Soit E un ensemble fini. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

Exercice 1.15. Soient E et F deux ensembles finis.

- (1) Montrer que F^E est fini et déterminer $|F^E|$ en termes de $|E|$ et $|F|$.
- (2) Montrer que $\{f \in F^E : f \text{ est injective}\}$ est fini et déterminer son cardinal en termes de $|E|$ et $|F|$.
- (3) Montrer que $\{f \in F^E : f \text{ est bijective}\}$ est fini et déterminer son cardinal en termes de $|E|$.

Exercice 1.16. Soit E un ensemble.

- (1) On suppose E fini.
 - (a) Pour $k \in \{0, 1, \dots, |E|\}$, déterminer le cardinal de $\{A \in \mathcal{P}(E) : |A| = k\}$ (l'ensemble des parties à k éléments de E).
 - (b) En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et déterminer $|\mathcal{P}(E)|$.
 - (c) Trouver une autre démonstration par récurrence sur $|E|$.
- (2) Réciproquement, montrer que si $\mathcal{P}(E)$ est fini alors E l'est aussi.

Exercice 1.17. Soit E un ensemble fini.

Exprimer $|\{(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : A \cup B = E\}|$ en termes de $|E|$.

Exercice 1.18 (Principe des tiroirs de Dirichlet).

- (1) Montrer que lors d'un événement avec au moins deux personnes, on peut toujours trouver deux personnes ayant discuté avec le même nombre de personnes.
- (2) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$, $r \geq 1$, deux à deux distincts tels que $n \mid \sum_{k=1}^r a_{i_k}$.
- (3) Montrer qu'étant donnés 13 nombres réels, on peut toujours en trouver deux x, y vérifiant

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

On pourra commencer par comparer cette expression avec le formulaire trigonométrique.

- (4) **TODO** : Ajouter d'autres applications

Exercice 1.19. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si $E \subset F \subset G$ et $|E| = |G|$ alors $|E| = |F|$.

Exercice 1.20.

- (1) Déterminer $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$.
- (2) Déterminer $|\mathbb{N}^{\{0,1\}}|$.

Exercice 1.21.

- (1) Déterminer le cardinal de $S := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ est fini}\}$.
- (2) Est-ce que l'ensemble $T := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ est infini}\}$ est dénombrable?

Exercice 1.22. Montrer que tout ensemble d'intervalles deux à deux disjoints, non vides et non réduits à un singleton est dénombrable, i.e. si $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifie

- (i) $\forall I \in X$, I est un intervalle non vide et non réduit à un singleton
- (ii) $\forall I, J \in X$, $I \neq J \implies I \cap J = \emptyset$

alors X est dénombrable.

Exercice 1.23. Montrer qu'un ensemble est infini si et seulement s'il admet une partie propre de même cardinal.

Exercice 1.24. Montrer que $]0, 1[=]0, 1] = |\mathbb{R}|$.

On pourra essayer de montrer le résultat de deux façons différentes : une utilisant le théorème de Cantor–Schröder–Bernstein et l'autre en exhibant une bijection.

Exercice 1.25.

- (1) Montrer de façon concise que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.
- (2) Montrer plus précisément que $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$.

On pourra essayer de résoudre cette question de deux façons différentes : une utilisant le théorème de Cantor–Schröder–Bernstein et l'autre en exhibant une bijection.

Exercice 1.26.

- (1) Montrer que $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$.
- (2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.
- (3) Montrer que $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ where $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is the set of sequences/functions $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 1.27. Soit $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Montrer que $|S^2| = |\mathbb{R}|$.

Exercice 1.28. Déterminer le cardinal de l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 1.29. Existe-t-il un ensemble E tel que $|\mathcal{P}(E)| = \aleph_0$?

Exercice 1.30. Considérons $\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(a, b) = a + b\sqrt{2}$.

- (1) Est-ce que θ est surjective?
- (2) Montrer que θ est injective.
- (3) Posons $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $|\mathbb{Z}[\sqrt{2}]| = \aleph_0$.

Exercice 1.31.

- (1) Montrer que $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|$.
- (2) Montrer que $\Phi : \begin{cases} C^0(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \\ f & \mapsto f|_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ est injective.
- (3) En déduire que $|C^0(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$.

2 Espaces mesurés

2.1 Tribus et espaces mesurables

Définition 2.1. Une *tribu* (ou σ -algèbre) sur un ensemble E est une famille $\mathcal{A}$ de parties de E telle que

- (i) $E \in \mathcal{A}$;
- (ii) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$;
- (iii) Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemples 2.2. Soit E un ensemble, alors les familles suivantes sont des tribus :

- $\mathcal{A} := \{\emptyset, E\}$ est la tribu grossière;
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(E)$ est la tribu discrète;
- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $\mathcal{A} := \{\emptyset, E, A, A^c\}$ est la plus petite tribu contenant A ;
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$.

Définition 2.3. Un *espace mesurable* est la donnée d'un couple $(E, \mathcal{A})$ où E est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur E . Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelées *parties mesurables*.

Proposition 2.4. Si $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable alors

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$;
- (iii) Si $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i=1}^s A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i=1}^s A_i \in \mathcal{A}$;
- (iv) Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ et $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{A}$;
- (v) Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors $\liminf_n A_n \in \mathcal{A}$ et $\limsup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

- (i) $\emptyset = E^c$.
- (ii) En passant au complémentaire la stabilité par réunion dénombrable.
- (iii) Il suffit de poser $A_n = \emptyset$ (resp. $A_n = E$) pour $n \geq s + 1$.
- (iv) Car une tribu est stable par réunion, intersection et complémentaire.
- (v) Car les limites inférieures et supérieures de suites d'ensembles se définissent à partir de réunions et d'intersections dénombrables. ■

Proposition 2.5. Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur un ensemble E alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur E .

Corollaire 2.6. Soit E un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Alors

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ tribu} \\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

est la plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{C}$. On dit que $\sigma(\mathcal{C})$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Remarque 2.7. Attention, la réunion de deux tribus peut ne pas être une tribu. Prenons $E := \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ et $\mathcal{B} := \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ sont deux tribus sur E . Mais $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas une tribu puisque $\{1\}, \{3\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mais $\{1, 3\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Proposition 2.8. Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $\mathcal{B}$ une tribu sur F . Alors $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E , appelée tribu image réciproque de $\mathcal{B}$ par f .

Démonstration.

- (i) $E = f^{-1}(F) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ puisque $F \in \mathcal{B}$.
- (ii) Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{B})$ alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $A = f^{-1}(B)$ d'où $A^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ puisque $B^c \in \mathcal{B}$.
- (iii) Soit $(A_n)_n \in f^{-1}(\mathcal{B})^{\mathbb{N}}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in \mathcal{B}$ tel que $A_n = f^{-1}(B_n)$ d'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ puisque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$. ■

Corollaire 2.9. Soient $S \subset E$ deux ensembles et $\mathcal{A}$ une tribu sur E . Alors $\mathcal{A}_S := \{A \cap S : A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur S appelée tribu trace de $\mathcal{A}$ sur S .

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\{A \cap S : A \in \mathcal{A}\} = \iota^{-1}(\mathcal{A})$ où $\iota : S \rightarrow E$ est l'inclusion : la tribu trace est la tribu image réciproque de $\mathcal{A}$ par ι . ■

Remarque 2.10. Attention, si $f : E \rightarrow F$ est une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur E alors $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ n'est généralement pas une tribu sur F . Prenons par exemple l'inclusion $\iota : S \rightarrow E$ où $S \subsetneq E$ alors $E \notin \iota(\mathcal{A})$.

Proposition 2.11. Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur E .

Alors $f_*(\mathcal{A}) := \{B \in \mathcal{P}(F) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur F appelée tribu image de $\mathcal{A}$ par f .

Lemme 2.12 (Lemme de transport). Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

et toutes deux sont des tribus sur E .

Démonstration. Puisque $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$, on a $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ d'où $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ (puisque le terme de droite est une tribu).

Notons $\mathcal{B}$ la tribu image de $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ par f . Alors $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, puisque $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. D'où $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$, i.e. $f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Autrement dit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. ■

Exemple important : les boréliens

Définition 2.13. Une *topologie* sur un ensemble E est une famille de $\mathcal{O}$ de parties de E contenant E et $\emptyset$, stable par union quelconque et par intersection finie.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés *ouverts*. Un *espace topologique* est la donnée d'un couple $(E, \mathcal{O})$ où E est un ensemble de $\mathcal{O}$ une topologie sur E .

Exemple 2.14. Les ouverts de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^d$ sont parties $O \subset \mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset O$$

où $B(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\}$ est la boule ouverte centrée en x de rayon ε .

Définition 2.15. La tribu *borélienne* d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est la tribu $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés *boréliens*.

Pour $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^d$) muni de sa topologie usuelle, on notera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) sa tribu borélienne.

Proposition 2.16. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{[a, +\infty[: a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{]-\infty, b[: b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{]-\infty, b[: b \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{]-\infty, b[: b \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]-\infty, b[: b \in \mathbb{Q}\}). \end{aligned}$$

Démonstration. Notons $\mathcal{O}$ la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. On a $\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{O}$ d'où $\sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Soit $O \in \mathcal{O}$. Pour $x \in O$, il existe $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ tels que $]a_x, b_x[\subset O$ de sorte que $O = \bigcup_{x \in O}]a_x, b_x[\in \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\})$. Ainsi $\mathcal{O} \subset \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\})$ puis $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\})$.

Donc $\sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[=]-\infty, b[\cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a, a + 2^{-n}[$. D'où

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\})$.

Les autres égalités se démontrent de façon similaire. ■

Proposition 2.17. *On a*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &= \{]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[: a_i, b_i \in \mathbb{Q} \} \\ &= \{]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[: a_i, b_i \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

Dans la suite, nous considérerons $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec la convention $a \cdot \pm\infty = 0$ et la topologie induite par le prolongement naturel de l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.18. *On a*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \}) = \sigma(\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{Q} \}) \\ &= \sigma(\{ [-\infty, b[: b \in \mathbb{R} \}) = \sigma(\{ [-\infty, b[: b \in \mathbb{Q} \})\end{aligned}$$

Remarque 2.19. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}([0, +\infty])$ sont les tribus traces de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ respectivement sur $\mathbb{R}$ et $[0, +\infty]$.

2.2 Fonctions mesurables

Définition 2.20. Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ est *mesurable* si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.21. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur F alors la tribu $f^{-1}(\mathcal{B})$ image réciproque de $\mathcal{B}$ par f est la plus petite tribu sur E rendant f mesurable;
- Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E alors la tribu $f_*(\mathcal{A})$ image de $\mathcal{A}$ par f est la plus grande tribu sur F rendant f mesurable.

Exemples 2.22.

- Une fonction constante entre deux espaces mesurables est mesurable.
- Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $1_A : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.23. Soient $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ une fonction entre deux espaces mesurables et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ tel que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors f est mesurable si et seulement si $\forall C \in \mathcal{C}, f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

Démonstration. L'implication directe découle de la définition de fonction mesurable puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Montrons la réciproque. Supposons $\forall C \in \mathcal{C}, f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$. Soit $B \in \mathcal{B}$ alors

$$\begin{aligned}f^{-1}(B) &\in f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \text{ puisque } \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \\ &= \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \text{ d'après le lemme de transport} \\ &\subset \mathcal{A} \text{ puisque } f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A} \text{ et que } \mathcal{A} \text{ est une tribu.}\end{aligned}$$

Donc f est mesurable. ■

Corollaire 2.24. Soient E et F deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes alors toute application continue $f : E \rightarrow F$ est mesurable.

Proposition 2.25. Si $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ et $g : (F, \mathcal{B}) \rightarrow (G, \mathcal{C})$ sont mesurables alors $g \circ f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (G, \mathcal{C})$ est mesurable aussi.

Démonstration. Soit $C \in \mathcal{C}$ alors $g^{-1}(C)$ est mesurable (puisque g l'est) et donc $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ est mesurable (puisque f l'est). ■

Exemples importants : les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$, $\overline{\mathbb{R}}$ et $[0, +\infty]$

Dans la suite, nous considérerons de façon primordiale des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$, $\overline{\mathbb{R}}$ et $[0, +\infty]$. Sauf mention explicite du contraire, la tribu considérée sera toujours la tribu borélienne associée.

Pour des raisons de concision, étant donnée une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$), nous noterons dans la suite $\{f > a\} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ (resp. $\{f > a\} := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : f(x) > a\}$).

La proposition suivante est une conséquence immédiate des propositions 2.23 et 2.16.

Proposition 2.26. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (resp. $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$). Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) f est mesurable ;
- (ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \{f > a\} \in \mathcal{A}$;
- (iii) $\forall a \in \mathbb{R}, \{f \geq a\} \in \mathcal{A}$;
- (iv) $\forall a \in \mathbb{R}, \{f < a\} \in \mathcal{A}$;
- (v) $\forall a \in \mathbb{R}, \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$;
- (vi) $\forall a \in \mathbb{Q}, \{f > a\} \in \mathcal{A}$;
- (vii) $\forall a \in \mathbb{Q}, \{f \geq a\} \in \mathcal{A}$;
- (viii) $\forall a \in \mathbb{Q}, \{f < a\} \in \mathcal{A}$;
- (ix) $\forall a \in \mathbb{Q}, \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.27. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Alors f est mesurable si et seulement si $\{f = +\infty\} \in \mathcal{A}$, $\{f = -\infty\} \in \mathcal{A}$ et la restriction $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ est mesurable.

Proposition 2.28. Toute fonction monotone $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Démonstration. Supposons f croissante et fixons $a \in \mathbb{R}$. Posons $A := \{f > a\}$ et montrons que A est un borélien.

Commençons par remarquer que si $x \in A$ et $y \geq x$ alors $y \in A$, puisque $f(y) \geq f(x) > a$.

Si $A = \emptyset$, c'est un borélien. Sinon, posons $c := \inf A \in [-\infty, +\infty[$. Par définition de la borne inférieure et par la stabilité ci-dessus, on a

$$]c, +\infty[\subset A \subset [c, +\infty[.$$

Ainsi, soit $A =]c, +\infty[$ ou $A = [c, +\infty[$ si $c \in \mathbb{R}$, soit $A = \mathbb{R}$ si $c = -\infty$. Dans tous les cas A est un borélien. Donc f est mesurable.

Si f est décroissante, on applique ce qui précède à $-f$. ■

Proposition 2.29. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f, g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

$$f + g, \quad fg, \quad \lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad \max(f, g), \quad \min(f, g),$$

$$f^+ := \max(f, 0), \quad f^- := \max(-f, 0), \quad |f|,$$

ainsi que $\frac{f}{g}$ lorsque g ne s'annule pas.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ alors

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g > a - q\}) \in \mathcal{A}$$

comme union dénombrable de mesurables. Ainsi $f + g$ est mesurable.

Remarquons ensuite que $x \mapsto x^2$ est mesurable, car continue, et donc que $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ est mesurable.

De même $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ est mesurable puisque $x \mapsto |x|$ est continue donc mesurable.

Enfin, si g ne s'annule pas alors $\frac{1}{g}$ est mesurable en composant g avec $]0, +\infty[\ni x \mapsto \frac{1}{x} \in]0, +\infty[$ continue donc mesurable. ■

Proposition 2.30. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f, g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ mesurables. Alors $f + g$, fg et λf , où $\lambda \in [0, +\infty]$, sont mesurables.

Proposition 2.31. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $(E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Alors les fonctions

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

sont mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\{ \sup_n f_n > a \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > a\} \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \left\{ \inf_n f_n < a \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n < a\} \in \mathcal{A},$$

comme réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$. D'après la Proposition 2.26, les fonctions $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont donc mesurables. Les deux dernières s'obtiennent en remarquant que

$$\limsup_n f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_n f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k.$$

■

Corollaire 2.32. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $(E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, alors

- (1) $\left\{ x \in E : (f_n(x))_n \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \right\} = \left\{ \limsup_n f_n = \liminf_n f_n \right\} \in \mathcal{A}$;
- (2) Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f alors f est mesurable;
- (3) Si les f_n sont à valeurs dans $[0, +\infty]$ alors la fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est mesurable.

Remarque 2.33. La démonstration de la Proposition 2.31 repose sur l'identité

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n > a \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > a\}.$$

C'est ici que la stabilité d'une tribu par union dénombrable intervient : c'est grâce à cette propriété qu'une limite simple de fonctions mesurables est mesurable. Remarquons que l'hypothèse de dénombrabilité, utilisée pour étudier les limites, est le bon seuil. En effet, si une tribu était stable par union quelconque alors n'importe quelle partie serait borélienne comme réunion de singletons.

2.3 Mesures et espaces mesurés

On note $[0, +\infty]$ pour $[0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ avec les conventions usuelles.

Définition 2.34. Une *mesure* sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints³⁷ alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad \sigma\text{-additivité.}$$

Un *espace mesuré* est la donnée d'un triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ où $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Exemples 2.35. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Les fonctions suivantes sont des mesures :

- La mesure nulle : $\mu \equiv 0$.
- La mesure grossière : $\mu(\emptyset) := 0$ et $\mu(A) := +\infty$ si $A \neq \emptyset$.
- La mesure de comptage : $\mu(A) := |A|$ si A est fini et $\mu(A) := +\infty$ sinon.

³⁷i.e. $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \implies A_n \cap A_m = \emptyset$; en particulier, on peut avoir $A_n = \emptyset$.

- La mesure de Dirac en $x \in E$: $\mu(A) := 1$ si $x \in A$ et $\mu(A) := 0$ sinon (on note généralement $\delta_x := \mu$ pour la mesure de Dirac).

Proposition 2.36. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors

- (1) Si $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints alors $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_s) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_s)$;
- (2) Si $A, B \in \mathcal{A}$ vérifient $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$;
Si de plus $\mu(A) < +\infty$ alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
- (3) Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;
- (4) Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante alors $(\mu(A_n))_n$ est croissante et

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n);$$

- (5) Pour tout $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n);$$

- (6) Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ alors $(\mu(A_n))_n$ est décroissante et

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration.

- (1) C'est une conséquence de la σ -additivité en posant $A_n = \emptyset$ pour $n \geq s+1$.
- (2) Puisque $B = A \sqcup (B \setminus A)$ et $B \setminus A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$. D'où $\mu(B) \geq \mu(A)$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ dès lors que $\mu(A) < +\infty$.
- (3) Puisque $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ et que ces ensembles sont mesurables, on a

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &= (\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)) + (\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)) \\ &= \mu(A) + \mu(B), \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ et $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$.

- (4) La croissance de la suite $(\mu(A_n))_n$ découle du deuxième point. Posons $B_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Alors les B_n sont mesurables et deux à deux disjoints. De plus, on a

$$\bigsqcup_{k=0}^n B_k = A_n \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

d'où, par σ -additivité,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

- (5) Posons $C_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1$, $C_n := A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Alors les C_n sont mesurables et deux à deux disjoints. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset A_n$ et $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. D'où, par σ -additivité et le deuxième point,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- (6) La décroissance de la suite $(\mu(A_n))_n$ découle du deuxième point. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n_0 = 0$, de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) \leq \mu(A_0) < +\infty$.

La suite $(A_0 \setminus A_n)_n$ est alors croissante et vérifie $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_0 \setminus A_n) = A_0 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. D'où, d'après le quatrième point,

$$\mu\left(A_0 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_0 \setminus A_n).$$

On déduit ensuite du troisième point que

$$\mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(A_0) - \mu(A_n)).$$

L'égalité souhaité découle enfin de l'hypothèse $\mu(A_0) < +\infty$. ■

Remarque 2.37. La condition $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ pour un certain n_0 est indispensable dans le dernier point. En effet, considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage. Posons $A_n := \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(A_n)_n$ est décroissante, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ mais $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = +\infty$.

Proposition 2.38. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $S \subset E$. Alors $\mu_S : \mathcal{A}_S \rightarrow [0, +\infty]$ défini par $\mu_S(A) = \mu(A \cap S)$ est une mesure sur $(S, \mathcal{A}_S)$ appelée mesure trace de μ sur S .

Proposition 2.39. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Alors $f_*\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ défini par $f_*\mu(B) := \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$, appelée mesure image de μ par f .

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque f est mesurable. Ainsi $f_*\mu$ est bien définie.

Puis $f_*\mu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

Soit $(B_n)_n \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, alors $(f^{-1}(B_n))_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, d'où

$$f_*\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_*\mu(B_n).$$

Donc $f_*\mu$ est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$. ■

Spoilers : mesures de Borel–Lebesgue et de Lebesgue

Les exemples rencontrés dans cette partie (mesure de comptage, mesure de Dirac...) ne sont pas suffisantes pour obtenir une théorie de l'intégration ayant les propriétés recherchées. Au chapitre 4, nous construirons les mesures de Lebesgue et de Borel–Lebesgue à cet effet. Les énoncés ci-dessous caractérisent ces mesures, sans démonstration dans un premier temps.

Théorème 2.40. Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \text{ pour tout } a_i \leq b_i.$$

De plus, cette mesure est invariante par translation. On l'appelle mesure de Borel–Lebesgue.

Exemples 2.41.

- (1) Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) + \lambda(a) + \lambda(b) = b - a$.
- (2) Dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$: $\forall x \in \mathbb{R}^d, \lambda(\{x\}) = 0$; donc $\lambda(S) = 0$ pour toute partie dénombrable S par σ -additivité. Ainsi $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$ de mesure nulle.
- (3) Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: $\lambda(\mathbb{R}^d) = +\infty$ et $\lambda(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U .

Définition 2.42. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $S \subset E$ est dite *négligeable* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Remarque 2.43. Dans la définition précédente, on ne demande pas que $S \in \mathcal{A}$. La mesure de Lebesgue, définie ci-dessous, s'obtient en prolongeant la mesure de Borel–Lebesgue sur un tribu plus grande que la tribu borélienne contenant tous les négligeables.

Proposition 2.44. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, alors

- (1) Toute partie d'un ensemble négligeable est aussi négligeable.
- (2) Toute réunion dénombrable de négligeables est négligeable.

Définition 2.45. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une propriété $P(x)$ est vraie *presque partout* (p.p.) si l'ensemble $\{x \in E : P(x) \text{ est fausse}\}$ est négligeable.

Définition 2.46. Un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est dit *complet* si tout ensemble négligeable est mesurable.

Théorème 2.47. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Posons

$$\mathcal{A}_\mu := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \text{ négligeable}\}.$$

Alors $\mathcal{A}_\mu$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$ et $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ définit l'unique mesure sur $\mathcal{A}_\mu$ prolongeant μ . Ainsi $(E, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ est un espace mesurable complet, appelé *complété* de $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Démonstration. **TODO** ■

Théorème 2.48 (Tribu et mesure de Lebesgue).

Il existe un unique espace mesuré complet $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ vérifiant :

- (i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) $\lambda\left(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ pour tout $a_i \leq b_i$;
- (iii) pour tout espace mesuré complet $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant (i) et (ii), on a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$ et $\mu|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} = \lambda$.

De plus, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est le complété de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et

- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), x + A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda(x + A) = \lambda(A)$;
- $\forall \varphi \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^d), \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \varphi(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda(\varphi(A)) = |\det(\varphi)|\lambda(A)$.

Démonstration. La complétion de la mesure de Borel–Lebesgue donne l'existence et le troisième point l'unicité. ■

Remarque 2.49. La mesure de Borel–Lebesgue est donc la trace de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 2.50. Attention, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$: nous verrons dans la suite qu'il n'existe pas de mesure σ -additive, normalisée et invariante par translation sur $\mathbb{R}$ qui mesure toutes les parties bornées (en particulier, définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).

Exercices

Une tribu infinie n'est jamais dénombrable cardinal des boréliens et des lebesgue

Exercice 2.1. Déterminer les tribus $\mathcal{A} := \sigma(\{\{1, 2\}, \{3\}\})$ et $\mathcal{B} := \sigma(\{\{1\}, \{2\}\})$ de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2.2. Soit E un ensemble. Déterminer la tribu engendrée par les singletons de E .

Exercice 2.3. On considère $F \subset E$ deux ensembles. On définit $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E) : A \subset F \text{ ou } A^c \subset F\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu stable par inclusion.

Exercice 2.4. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus d'un ensemble E .

- (1) Montrer que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ou $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
- (2) Montrer que $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$.

Exercice 2.5. Soit E un ensemble. On définit $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$.

- (1) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
- (2) Montrer que $\mathcal{A}$ coïncide avec la tribu engendrée par les singletons de E .

Exercice 2.6. (1) Montrer qu'une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est un borélien.

- (2) Montrer que $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| \leq 2\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.
- (3) Montrer que $A := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, |x - n| < 2^{-n}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.7. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Montrer les assertions suivantes :

- (1) Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur F alors la tribu $f^{-1}(\mathcal{B})$ image réciproque de $\mathcal{B}$ par f est la plus petite tribu sur E rendant f mesurable;
- (2) Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E alors la tribu $f_*(\mathcal{A})$ image de $\mathcal{A}$ par f est la plus grande tribu sur F rendant f mesurable.

Exercice 2.8.

- (1) Montrer que $1_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.
- (2) Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors $f' : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.
- (3) Montrer que toute fonction monotone $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Exercice 2.9. Soient $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et $M > 0$.

Montrer que $g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ défini par $g(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| \leq M \\ -M & \text{si } f(x) < -M \\ M & \text{si } f(x) > M \end{cases}$ est mesurable.

Exercice 2.10. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $(E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables :

- (1) $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ est majorée par } 1\}$;
- (2) $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ est bornée}\}$;
- (3) $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ converge vers } 0\}$;
- (4) $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ converge}\}$.

3 Intégration par rapport à une mesure

3.1 Fonctions étagées positives

3.2 Fonctions mesurables positives

3.3 Fonctions intégrables

3.4 Convergence dominée

3.5 Intégrales à paramètre

4 Mesure de Lebesgue

TODO : Négligeabilité et "presque partout" TODO : À décider : complétion à la main (sans Caratheodory) TODO : Parler de la composition (comparer avec Borel–Lebesgue)

4.1 Classes monotones

4.2 Théorème de Caratheodory

4.3 Existence et unicité

4.4 Liens avec l'intégrale de Riemann

TODO : On peut déjà mettre en exercice la version linéaire du changement de variables

5 Théorème de Fubini

5.1 Mesure produit

5.2 Théorème de Fubini

5.3 Applications à la mesure de Lebesgue

TODO : Penser à inclure IPP/Convolution/Volume boule unité

Ne pas oublier la formule de changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue

6 Espaces L^p

6.1 Définitions

6.2 Structure d'espace de Banach

TODO : Commencer avec les inégalités de Hölder et de Minkowski