

Université d'Angers

Analyse fonctionnelle

Jean-Baptiste Campesato

Version du 19 février 2026

Table des matières

1	Topologie générale	3
1.1	Espaces topologiques : ouverts, fermés et voisinages	3
1.2	Adhérence, intérieur et frontière	5
1.3	Limite(s) d'une suite	7
1.4	Continuité	8
1.5	Compacité	9
1.6	Connexité	11
1.7	Topologie produit	13
	Exercices	14
2	Espaces métriques	17
2.1	Distances et boules	17
2.2	Topologie d'un espace métrique	17
2.3	Limites et continuité	18
2.4	Compacité	18
2.5	Complétude	20
2.6	Espaces métriques produits	22
	Exercices	24
3	Espaces vectoriels normés	28
3.1	Définitions	28
3.2	Topologie d'un espace vectoriel normé	28
3.3	Applications linéaires continues	29
3.4	Comparaison de normes	30
3.5	Cas de la dimension finie	31
	Exercices	34
4	Espaces de Banach	38
4.1	Définition et une caractérisation via les séries absolument convergentes	38
4.2	Les théorème de Banach–Schauder et quelques conséquences	38
	Exercices	40
5	Applications continues	44
6	Le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences	45
7	Topologies faibles	46
8	Un peu de théorie spectrale	47
9	Espaces de Sobolev	48
10	Notions sur les distributions	49

1 Topologie générale

1.1 Espaces topologiques : ouverts, fermés et voisinages

1.1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1. Une *topologie* sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X , i.e. $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$, que l'on appelle *ouverts*, vérifiant¹

- (i) $X \in \mathcal{O}$ et $\emptyset \in \mathcal{O}$;
- (ii) une réunion (quelconque) d'ouverts est un ouvert, i.e. si $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ alors $\bigcup_{O \in \mathcal{U}} O \in \mathcal{O}$;
- (iii) une intersection finie d'ouverts est un ouvert, i.e. si $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ est fini alors $\bigcap_{O \in \mathcal{U}} O \in \mathcal{O}$.

Un *espace topologique* est la donnée d'un couple $(X, \mathcal{O})$ où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ une topologie sur X .

Remarque 1.2. Pour des raisons de concision, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on parle de l'espace topologique X plutôt que de l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$.

Exemples 1.3. • Soit X un ensemble alors $\mathcal{O} := \{X, \emptyset\}$ est une topologie sur X , appelée *topologie grossière*.

- Soit X un ensemble alors $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X , appelée *topologie discrète*.
- La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est définie par $\mathcal{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in O, \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O\}$.
- Soit X un ensemble alors $\mathcal{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) : E \setminus O \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$ est une topologie sur X , appelée *topologie cofinie*.
- Soit $\mathbb{k}$ un corps. La *topologie de Zariski* sur $\mathbb{k}^n$ est la topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques.

Définition 1.4. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une *base* de $\mathcal{O}$ est une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ telle que tout élément de $\mathcal{O}$ s'écrit comme union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 1.5. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{O}$ si et seulement si pour tout ouvert $O \in \mathcal{O}$, pour tout $x \in O$, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $x \in V \subset O$.

Exemple 1.6. La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est à base dénombrable puisque $\mathcal{B} := \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ en est une base.

Définition 1.7. Soit X un espace topologique. Un *fermé* de X est le complémentaire d'un ouvert, i.e. $F \subset X$ est un fermé si $X \setminus F$ est un ouvert.

Proposition 1.8. Soit X un espace topologique.

- (i) X et $\emptyset$ sont des fermés de X ;
- (ii) une intersection (quelconque) de fermés est un fermé;
- (iii) une réunion finie de fermés est un fermé.

Remarque 1.9. Considérons $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, alors

- $[-1, 1]$ est un fermé mais n'est pas un ouvert;
- $] - 1, 1[$ est un ouvert mais n'est pas un fermé;
- $] - 1, 1]$ n'est ni un ouvert, ni un fermé;
- $\mathbb{R}$ est ouvert et fermé.

1.1.2 Voisinages, points isolés, points d'accumulation, espaces séparés

Définition 1.10. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Un *voisinage* de x est une partie $V \subset X$ telle qu'il existe un ouvert O vérifiant $x \in O \subset V$.

Remarque 1.11. Un ouvert contenant x est donc un voisinage de x , dans ce cas on pourra parler de *voisinage ouvert*.

¹Notons que si l'on considère la réunion et l'intersection sur les parties de X seulement alors le premier point est conséquence des deux suivantes puisque $\bigcup_{O \in \emptyset} O := \{x \in X : \exists O \in \emptyset, x \in O\} = \emptyset$ et $\bigcap_{O \in \emptyset} O := \{x \in X : \forall O \in \emptyset, x \in O\} = X$.

Proposition 1.12. Soient X un espace topologique et $x \in X$.

- (i) Soient $V, W \subset X$. Si V est un voisinage de x et si $V \subset W$ alors W est un voisinage de x .
- (ii) L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x .
- (iii) X est un voisinage de x .

Proposition 1.13. Soient X un espace topologique et $O \subset X$. Alors O est un ouvert si et seulement si O est voisinage de chacun de ses points.

Démonstration. Supposons que O soit un ouvert. Soit $x \in O$ alors O est un voisinage ouvert de x .

Réciproquement, supposons que O soit voisinage de chacun de ses points. Pour chaque $x \in O$, il existe O_x un ouvert tel que $x \in O_x \subset O$. On a alors que $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ est un ouvert comme réunion d'ouverts. ■

Définition 1.14. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Une *base de voisinages* de x est un ensemble $\mathcal{V}$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x , il existe $W \in \mathcal{V}$ vérifiant $W \subset V$.

Exemples 1.15. • Soient X un espace topologique et $x \in X$. Alors l'ensemble des ouverts contenant x est une base de voisinages de x .

- Soit $x \in \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Alors $\mathcal{V} := \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ est une base de voisinages de x qui est dénombrable.

Définition 1.16. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $a \in A$. On dit que a est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $(V \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$.

Définition 1.17. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. On dit que x est un *point d'accumulation* de A si pour tout voisinage V de x on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Remarque 1.18. Attention, un point d'accumulation de A n'est pas forcément un élément de A .

Proposition 1.19. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $a \in A$. Alors a est un point isolé de A si a est un élément de A qui n'est pas un point d'accumulation de A .

Définition 1.20. Un espace topologique X est *séparé* si pour tout $x, y \in X$ distincts, il existe V_x un voisinage de x et V_y un voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Exemples 1.21.

- $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est séparé.
En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. Posons $\delta := \frac{|x-y|}{2}$, $V_x :=]x - \delta, x + \delta[$ et $V_y :=]y - \delta, y + \delta[$. Alors V_x est un voisinage de x , V_y est un voisinage de y et $V_x \cap V_y = \emptyset$.
- Un espace topologique discret est séparé.
En effet, soient X un espace topologique discret et $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $\{x\}$ est un voisinage de x , $\{y\}$ est un voisinage de y et $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.
- Un espace topologique grossier ayant au moins deux éléments n'est pas discret.

1.1.3 Topologie induite

Proposition 1.22. Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique et si $Y \subset X$ alors $\mathcal{U} := \{O \cap Y : O \in \mathcal{O}\}$ est une topologie sur Y , appelée topologie induite.

En pratique, on dira que Y est un *sous-espace topologique* de X pour dire que l'on considère Y muni de la topologie induite.

Remarque 1.23. Un ouvert (resp. fermé) de Y n'est pas forcément un ouvert (resp. fermé) de X . En effet si $X := \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et si $Y :=]\pi, 42]$ est muni de la topologie induite alors Y est un ouvert et un fermé de Y mais ce n'est ni un ouvert ni un fermé de X .

En revanche, si Y est un ouvert (resp. fermé) de X alors tout ouvert (resp. fermé) de Y est aussi un ouvert (resp. fermé) de X .

Exemple 1.24. On considère $X := \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et $Y :=]-\pi, \pi[\cup \{42\}$ muni de la topologie induite. Alors $\{42\} =]41, 43[\cap Y$ est un ouvert de Y et $]-\pi, \pi[= [-\pi, \pi] \cap Y$ est un fermé de Y .

Proposition 1.25. Si X est un espace topologique et si $Y \subset X$ est muni de sa topologie induite alors :

- (i) $O \subset Y$ est un ouvert de Y si et seulement s'il existe $U \subset X$ un ouvert de X tel que $O = U \cap Y$;
- (ii) $F \subset Y$ est un fermé de Y si et seulement s'il existe $C \subset X$ un fermé de X tel que $F = C \cap Y$;
- (iii) $V \subset Y$ est un voisinage de $y \in Y$ dans Y si et seulement s'il existe $W \subset X$ un voisinage de y dans X tel que $V = W \cap Y$.

Proposition 1.26. Un sous-espace topologique d'un espace topologique séparé est séparé.

1.2 Adhérence, intérieur et frontière

1.2.1 Adhérence

Proposition 1.27. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Il existe un plus petit fermé de X contenant A . On le note $\overline{A}$ et on l'appelle adhérence de A .

Démonstration. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de X contenant A . Alors $\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un fermé de X contenant A . Montrons que c'est le plus petit.

Soit C un fermé de X contenant A alors $C \in \mathcal{F}$ d'où $\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset C$. ■

Remarque 1.28. On a vu dans la démonstration que $\overline{A}$ est l'intersection des fermés de X contenant A .

Proposition 1.29. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Alors A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition 1.30. Soit X un espace topologique.

- (1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- (2) Si $A \subset X$ alors $A \subset \overline{A}$.
- (3) Si $A \subset B \subset X$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- (4) Si $A \subset X$ alors $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- (5) L'adhérence d'une réunion finie est la réunion des adhérences :
si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(X)$ alors $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
- (6) Si $A, B \subset X$ alors $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Remarque 1.31. Pour une union quelconque, on a $\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \subset \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}$ mais l'inclusion réciproque peut être fausse.

En effet, si on considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle alors $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \subsetneq \overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Remarque 1.32. L'inclusion réciproque du dernier point peut aussi être fausse. En effet, considérons $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle et posons $A := \mathbb{Q}$ et $B := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Le résultat suivant explique pourquoi on utilise le terme d'adhérence pour parler de la "fermeture" d'une partie.

Proposition 1.33. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre A , i.e. si V est voisinage de x alors $V \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. On va montrer que $x \notin \overline{A}$ si et seulement s'il existe un voisinage V de x qui ne rencontre pas A , i.e. vérifiant $V \cap A = \emptyset$.

Supposons que $x \notin \overline{A}$ alors $V := X \setminus \overline{A}$ est un ouvert contenant x . C'est donc un voisinage de x . De plus $A \cap V = \emptyset$ puisque $A \subset \overline{A}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \emptyset$. Ainsi il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Alors $F := X \setminus O$ est un fermé de X contenant A puisque $O \cap A = \emptyset$, d'où $\overline{A} \subset F$. Donc $x \notin \overline{A}$ puisque $x \notin F$. ■

Corollaire 1.34. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. Alors x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Remarque 1.35. Un point d'accumulation de A est adhérent à A puisque $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$, mais la réciproque est fautive. En effet, si $A := \{x\}$ alors $x \in \overline{A}$ mais x n'est pas un point d'accumulation de A puisque $\overline{A \setminus \{x\}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

Définition 1.36. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On dit que A est *dense* (dans X) si $\overline{A} = X$.

Exemple 1.37. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour sa topologie usuelle.

1.2.2 Intérieur

Proposition 1.38. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Il existe un plus grand ouvert de X contenu dans A . On le note $\mathring{A}$ et on l'appelle *intérieur* de A .

Démonstration. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts de X contenus dans A . Alors $\mathring{A} := \bigcup_{O \in \mathcal{U}} O$ est un ouvert de X contenu dans A . Montrons que c'est le plus grand.

Soit U un ouvert de X contenu dans A alors $U \in \mathcal{U}$ d'où $\mathring{A} := \bigcup_{O \in \mathcal{U}} O \supset U$. ■

Remarque 1.39. On a vu dans la démonstration que $\mathring{A}$ est la réunion des ouverts de X contenus dans A .

Proposition 1.40. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Alors A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Proposition 1.41. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Alors $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$ et $X \setminus \overline{A} = \widehat{X \setminus A}$.

Démonstration. On a que $X \setminus \mathring{A}$ est un fermé de X contenant $X \setminus A$ (puisque $\mathring{A} \subset A$). Montrons que c'est le plus petit : soit F un fermé de X contenant $X \setminus A$ alors $X \setminus F$ est un ouvert de X contenu dans A d'où $X \setminus F \subset \mathring{A}$ et puis $X \setminus \mathring{A} \subset F$. Ainsi on a bien montré que $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.

En appliquant la première égalité à $X \setminus A$, il vient $X \setminus \widehat{X \setminus A} = \overline{X \setminus A}$ d'où $X \setminus \overline{A} = \widehat{X \setminus A}$. ■

Proposition 1.42. Soit X un espace topologique.

- (1) $\overline{X} = X$.
- (2) Si $A \subset X$ alors $\mathring{A} \subset A$.
- (3) Si $A \subset B \subset X$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
- (4) Si $A \subset X$ alors $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
- (5) L'intérieur d'une intersection finie est l'intersection des intérieurs :

$$\text{si } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(X) \text{ alors } \widehat{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \mathring{A}_i.$$

- (6) Si $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(X)^I$ alors $\widehat{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \mathring{A}_i$ et $\bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i \subset \widehat{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

Remarque 1.43. Les inclusions du dernier point peuvent être strictes.

Proposition 1.44. Soient X un espace topologique et $A \subset X$, alors $\mathring{A} = \{x \in X : A \text{ est un voisinage de } x\}$.

Démonstration. Soit $E := \{x \in X : A \text{ est un voisinage de } x\}$.

Soit $x \in E$ alors il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset A$. Puis $O \subset \mathring{A}$ d'où $x \in \mathring{A}$. Ainsi $E \subset \mathring{A}$.

Soit $x \in \mathring{A}$ alors $x \in \mathring{A} \subset A$ avec $\mathring{A}$ ouvert, donc A est un voisinage de x . Ainsi $x \in E$. D'où $E = \mathring{A}$. ■

1.2.3 Frontière

Définition 1.45. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On définit la *frontière* (ou le *bord*) de A par $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Proposition 1.46. Soient X un espace topologique et $A \subset X$.

- (1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$;
- (2) ∂A est un fermé de X ;
- (3) $\partial A = \partial(X \setminus A)$;
- (4) $\overline{A} = A \cup \partial A$;
- (5) $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$;
- (6) A est un fermé si et seulement si $\partial A \subset A$;
- (7) A est un ouvert si et seulement si $\partial A \cap A = \emptyset$.

Proposition 1.47. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. Alors $x \in \partial A$ si et seulement si pour tout voisinage de x dans X , on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

1.3 Limite(s) d'une suite

Définition 1.48. Soient X un espace topologique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers ℓ si pour tout voisinage V de ℓ dans X , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $x_n \in V$.

Proposition 1.49. Soient X un espace topologique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X , $\ell \in X$ et $\mathcal{V}$ une base de voisinages de ℓ . Alors $(x_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $x_n \in V$.

Exemples 1.50. • Si $X := \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, on retrouve bien la définition vue en début de licence : une suite réelle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |x_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Soit X un espace topologique discret. Alors une suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si elle est constante égale à ℓ à partir d'un certain rang.
- Soit X un espace topologique grossier. Alors toute suite $(x_n)_n$ converge vers tout élément ℓ de X .

Le dernier point de l'exemple précédent montre qu'une suite peut admettre plusieurs limites. L'énoncé suivant stipule que dans un espace topologique séparé, si une suite admet une limite alors cette dernière est unique.

Proposition 1.51. Soient X un espace topologique séparé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell, \ell' \in X$. Si $(x_n)_n$ converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell' = \ell$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$ alors il existe V un voisinage de ℓ et V' un voisinage ℓ' tels que $V \cap V' = \emptyset$.

Puisque $(x_n)_n$ converge vers ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $x_n \in V$. De même, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N'$ alors $x_n \in V'$. Posons $M := \max(N, N')$ alors $x_M \in V \cap V' = \emptyset$, d'où une contradiction. ■

Proposition 1.52. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in X$ alors $\ell \in \overline{A}$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in X$. Soit V un voisinage de ℓ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in V$ d'où $x_N \in V \cap A$. On a montré que pour tout voisinage de ℓ , $V \cap A \neq \emptyset$, i.e. $\ell \in \overline{A}$. ■

L'exemple suivant montre que la réciproque est généralement fautive : il se peut qu'un point adhérent de A ne soit pas limite d'une suite d'éléments de A .

Exemple 1.53. Considérons par exemple $\mathbb{R}$ muni de la topologie codénombrable, i.e. O est un ouvert si et seulement si $\mathbb{R} \setminus O$ est dénombrable² ou $O = \emptyset$. Posons $A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Montrons d'abord que $0 \in \overline{A}$. Soit V un voisinage de 0 alors il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Ainsi $X \setminus O$ est dénombrable (puisque $O \neq \emptyset$) et $X \setminus V \subset X \setminus O$. Donc $X \setminus V$ est dénombrable. Puisque A n'est pas dénombrable, il y a forcément un élément de A qui n'est pas dans $X \setminus V$, i.e. $V \cap A \neq \emptyset$. Donc $V \cap A \neq \emptyset$ pour tout voisinage de 0, i.e. $0 \in \overline{A}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers 0. Alors $V := \mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un voisinage ouvert de 0. Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in V$, d'où une contradiction.

En revanche, on verra dans la suite que la réciproque est vraie pour les espaces métriques (Proposition 2.15).

Définition 1.54. Soient X un espace topologique et $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . Une *suite extraite* (ou *sous-suite*) de $(x_n)_n$ est une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Proposition 1.55. Soit X un espace topologique. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X convergeant vers ℓ alors toute suite extraite converge aussi vers ℓ .

1.4 Continuité

La définition suivante de la continuité généralise naturellement celles vues les années précédentes : fonctions réelles, applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé...

Définition 1.56. Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue* en $x \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y , il existe un voisinage U de x dans X tel que $f(U) \subset V$.

Proposition 1.57. Soient X et Y deux espaces topologiques. L'application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $x \in X$ si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X .

Démonstration. Supposons que $f : X \rightarrow Y$ soit continue en $x \in X$. Soit V un voisinage de $f(x)$ dans Y , alors il existe un voisinage U de x dans X tel que $f(U) \subset V$. Puis $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x .

Supposons que pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X . Soit V un voisinage de $f(x)$ dans Y , alors $U := f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X et $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$. Donc f est continue en x . ■

Définition 1.58. Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue* si elle est continue en tout point $x \in X$.

Exemples 1.59. • Une application constante est continue.

- L'identité $\text{id} : X \rightarrow X$ est continue.

Proposition 1.60. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. Si f est continue en $x \in X$ et si g est continue en $f(x)$ alors $g \circ f$ est continue en x .

Proposition 1.61. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $a \in A$. Si f est continue en a alors $f|_A : A \rightarrow Y$ est continue en a pour la topologie induite sur A . En particulier, si f est continue alors $f|_A$ est continue pour la topologie induite.

Remarque 1.62. En revanche, il se peut que $f|_A$ soit continue en a sans que f ne le soit. Considérons par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Alors $f|_{\mathbb{Q}}$ et $f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ sont continues mais f n'est nulle part continue.

²Par dénombrable, dans ces notes on entend en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Proposition 1.63. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue en $x \in X$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Y convergeant vers $f(x)$.

Démonstration. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue en $x \in X$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x . Soit V un voisinage de $f(x)$ alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x . Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $x_n \in f^{-1}(V)$. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n \geq N$, on a $f(x_n) \in V$. On a bien montré que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$. ■

Remarque 1.64. Attention, il se peut que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$ pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x sans que f ne soit continue en x .

Considérons $f = \text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ où $\mathcal{C}$ est la topologie codénombrable (voir Exemple 1.53) et $\mathcal{U}$ est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. En adaptant l'argument de l'exemple 1.53, on montre que si $(x_n)_n$ converge vers 0 pour $\mathcal{C}$ alors $(x_n)_n$ est constante égale à 0 et converge donc aussi pour $\mathcal{U}$. En revanche, f n'est pas continue en 0 puisque $f^{-1}((-1, 1)) = (-1, 1)$ n'est pas un voisinage de 0 pour $\mathcal{C}$ (en effet, $(-1, 1)$ ne contient pas d'ouvert).

Nous verrons dans la suite que ce phénomène n'est pas possible lorsque le domaine est un espace métrique (voir Proposition 2.18).

Les caractérisations suivantes de la continuité sont vraiment fondamentales en topologie.

Proposition 1.65. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) f est continue;
- (ii) pour tout O ouvert de Y , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X ;
- (iii) pour tout F fermé de Y , $f^{-1}(F)$ est un fermé de X .

Démonstration.

Montrons que (i) $\implies$ (ii). Supposons que f soit continue. Soit O un ouvert de Y . Soit $x \in f^{-1}(O)$ alors O est un voisinage ouvert de $f(x)$. Puisque f est continue, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x . Donc $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert.

Montrons que (ii) $\implies$ (i). Soit $x \in X$. Soit V un voisinage de $f(x)$. Alors il existe un ouvert O de Y tel que $f(x) \in O \subset V$. Par hypothèse, $f^{-1}(O)$ est un ouvert. Puisque $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$, on a bien que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x . Donc f est continue.

Montrons que (ii) $\implies$ (iii). Supposons (ii). Soit F un fermé de Y alors $f^{-1}(Y \setminus F)$ est un ouvert, donc $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ est un fermé.

Montrons que (iii) $\implies$ (ii). Supposons (iii). Soit O un ouvert de Y alors $f^{-1}(Y \setminus O)$ est un fermé, donc $f^{-1}(O) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus O)$ est un ouvert. ■

Définition 1.66. Un *homéomorphisme* est une bijection $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques telle que f et f^{-1} soient continues.

Définition 1.67. On dit que deux espaces topologiques X et Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$.

1.5 Compacité

Définition 1.68. Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie $K \subset X$ est un *quasi-compact* de X si de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e. si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ alors il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

En passant au complémentaire, on obtient la caractérisation suivante.

Proposition 1.69. Soient X un espace topologique et $K \subset X$. Alors K est un quasi-compact de X si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X telle que $\bigcap_{i \in I} F_i \subset X \setminus K$ alors il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i \in J} F_i \subset X \setminus K$.

Définition 1.70. On dit qu'un espace topologique X est *quasi-compact* si X est un quasi-compact de X .

Proposition 1.71. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Alors A est un quasi-compact de X si et seulement si A est un espace topologique quasi-compact pour la topologie induite.

Démonstration. Supposons que A soit un quasi-compact. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de A telle que $A = \bigcup_{i \in I} O_i$. Par définition de la topologie induite, pour $i \in I$, il existe U_i un ouvert de X tel que $O_i = U_i \cap A$. On a donc $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Puisque A est un quasi-compact, il existe une partie $J \subset I$ finie telle que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Finalement, $A = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap A) = \bigcup_{i \in J} O_i$.

Réciproquement, supposons que A soit un sous-espace topologique quasi-compact. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Alors $A = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap A)$. Puisque, pour tout $i \in I$, $O_i \cap A$ est un ouvert de A et que A est un espace topologique quasi-compact, il existe $J \subset I$ fini tel que $A = \bigcup_{i \in J} (O_i \cap A)$. Donc $A \subset \bigcup_{i \in J} O_i$. ■

Définition 1.72. On dit qu'un espace topologique est *compact* s'il est séparé et quasi-compact. On dit qu'une partie d'un espace topologique est un compact si c'est un espace topologique compact pour la topologie induite.

Remarque 1.73. Si X est un espace topologique séparé, alors une partie est un compact si et seulement si c'est un quasi-compact. En effet, on a vu qu'un sous-espace topologique d'un espace topologique séparé est séparé.

Proposition 1.74. Une union finie de quasi-compacts est quasi-compacte.

Remarque 1.75. Si X n'est pas un espace topologique séparé, une union finie de compacts peut ne pas être compacte. On considère $X := \{0, 1\}$ muni de la topologie grossière. Alors $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des compacts mais $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$ n'est pas compact (car non séparé).

Proposition 1.76. Toute partie fermée d'un espace (quasi-)compact est (quasi-)compacte.

Démonstration. Soit X un espace topologique quasi-compact et $F \subset X$ un fermé. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $F \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Alors $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i \in I} O_i$ et il existe donc $J \subset I$ fini tel que $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i \in J} O_i$. Ainsi $F \subset \bigcup_{i \in J} O_i$. On a bien montré que F est un quasi-compact. ■

La réciproque est vraie dans un espace topologique séparé, mais est fausse en général.

Proposition 1.77. Un compact d'un espace topologique séparé est fermé.

Démonstration. Soit X un espace topologique séparé et K un compact de X . On va montrer que $X \setminus K$ est voisinage de chacun de ses points.

Soit $x \in X \setminus K$. Puisque X est séparé, pour tout $y \in K$, il existe O_y un ouvert de X contenant x et U_y un ouvert de X contenant y tels que $O_y \cap U_y = \emptyset$. Puisque $K \subset \bigcup_{y \in K} U_y$, il existe $y_1, \dots, y_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$.

Alors $O := \bigcap_{i=1}^n O_{y_i}$ est un ouvert contenant x . De plus, pour $i = 1, \dots, n$, on a $O \cap U_{y_i} \subset O_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$. Ainsi $O \cap K \subset \bigcup_{i=1}^n O \cap U_{y_i} \subset \emptyset$, i.e. $O \subset X \setminus K$.

On a montré que pour tout $x \in X \setminus K$, il existe un voisinage ouvert O de x tel que $O \subset X \setminus K$, donc $X \setminus K$ est un ouvert et K est un fermé. ■

Exemple 1.78. On considère $X := \{0, 1\}$ muni de la topologie grossière. Alors $\{0\}$ est un compact mais n'est pas fermé.

Proposition 1.79. Dans un espace topologique séparé, une intersection non vide de compacts est un compact.

Démonstration. Soit X un espace topologique séparé et $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de X où $I \neq \emptyset$. Alors $K := \bigcap_{i \in I} K_i$ est un fermé de X comme intersection de fermés (puisque X est séparé). Soit $i_0 \in I$, alors $K = K \cap K_{i_0}$ est un fermé de K_{i_0} qui est compact, donc K est un espace topologique compact. ■

Remarque 1.80. Dans un espace topologique qui n'est pas séparé, l'intersection de deux (quasi-)compacts peut ne pas être un quasi-compact.

Considérons $X := \mathbb{N} \sqcup \{a, b\}$ muni de la topologie $\mathcal{O} := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{\mathbb{N} \cup \{a\}, \mathbb{N} \cup \{b\}, X\}$. Alors $K_a := \mathbb{N} \cup \{a\}$ et $K_b := \mathbb{N} \cup \{b\}$ sont deux quasi-compacts de X mais $K_a \cap K_b = \mathbb{N}$ n'est pas un quasi-compact de X . Voir l'exercice 1.25 pour l'intersection de deux compacts n'étant pas un quasi-compact.

Proposition 1.81. *L'image d'un quasi-compact par une application continue est un quasi-compact.*

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Soit K un quasi-compact de X . Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Alors $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$.

Puisque K est quasi-compact et que, pour $i \in I$, $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de X , il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(O_i)$. Puis $f(K) \subset f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(O_i)) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(O_i)) \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

On a bien montré que tout recouvrement de $f(K)$ par des ouverts admet un sous-recouvrement fini, i.e. que $f(K)$ est quasi-compact. ■

Corollaire 1.82. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue où Y est un espace topologique séparé. Si K est un (quasi-)compact de X alors $f(K)$ est un compact de Y .*

1.6 Connexité

1.6.1 Caractérisations et premières propriétés

Définition 1.83. On dit qu'un espace topologique est *connexe* s'il ne s'écrit pas comme union disjointe de deux ouverts non vides.

Proposition 1.84. *Soit X un espace topologique. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) X est connexe;
- (ii) X ne s'écrit pas comme union disjointe de deux fermés non vides;
- (iii) Toute application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète, est constante;
- (iv) Les seules parties X à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X ;

Démonstration.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons (i). Soient F_1 et F_2 deux fermés de X tels que $X = F_1 \sqcup F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Alors $F_2 = X \setminus F_1$ et $F_1 = X \setminus F_2$ sont ouverts. Par connexité, l'un est vide.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons (ii). Soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ continue, avec $\{0, 1\}$ espace discret. On a $X = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1)$. Puisque $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont des fermés, l'un est vide. Si $f^{-1}(0) = \emptyset$ alors $f \equiv 1$ et si $f^{-1}(1) = \emptyset$ alors $f \equiv 0$.
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons (iii). Soit A une partie de X ouverte et fermée. Alors $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue pour la topologie discrète car $\chi_A^{-1}(\{0, 1\}) = X$, $\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$ et $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ sont ouverts. Par hypothèse, χ_A est constante. Si $\chi_A \equiv 0$ alors $A = \emptyset$ et si $\chi_A \equiv 1$ alors $A = X$.
- (iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons (iv). Soient O_1 et O_2 deux ouverts de X tels que $X = O_1 \sqcup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Alors $O_1 = X \setminus O_2$ est fermé. Par hypothèse, soit $O_1 = \emptyset$, soit $O_1 = X$ et alors $O_2 = X \setminus O_1 = \emptyset$. ■

Remarque 1.85. Si X est un espace topologique connexe, pour montrer qu'un énoncé $P(x)$ est vrai pour tout $x \in X$, il suffit de montrer que $\{x \in X : P(x)\}$ est ouvert, fermé et non vide.

Définition 1.86. Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est un *connexe* de X si A est un espace topologique connexe pour la topologie induite.

Proposition 1.87. *L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.*

Démonstration. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $C \subset X$ un connexe de X .

Soit $\varphi : f(C) \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète.

Alors $\psi := \varphi \circ f : C \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, donc constante égale à $a \in \{0, 1\}$ puisque C est connexe.

Soit $y \in f(C)$ alors il existe $x \in C$ tel que $y = f(x)$ et $\varphi(y) = \psi(x) = a$. Donc φ est constante.

Ainsi $f(C)$ est connexe. ■

Proposition 1.88. *L'adhérence d'un connexe est connexe.*

Démonstration. Soient X un espace topologique et A un connexe de X .

Soient O_1, O_2 deux ouverts de X tels que $O_1 \cap \bar{A} \neq \emptyset$ et $\bar{A} = (O_1 \cap \bar{A}) \sqcup (O_2 \cap \bar{A})$.

Soit $x \in O_1 \cap \bar{A}$, alors puisque x est adhérent à A et que O_1 est un voisinage ouvert de x , on a $O_1 \cap A \neq \emptyset$.

De plus $A = A \cap \bar{A} = (O_1 \cap A) \sqcup (O_2 \cap A)$. Ainsi, puisque A est connexe, $O_2 \cap A = \emptyset$. D'où, $O_2 \cap \bar{A} = \emptyset$ (sinon, comme ci-dessus, on aurait $O_2 \cap A \neq \emptyset$). On a bien montré que $\bar{A}$ est connexe. ■

Proposition 1.89. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de connexes d'un espace topologique X telle que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un connexe de X .

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de connexes de X telle qu'il existe $a \in \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Notons $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Soient O_1 et O_2 deux ouverts de X tels que $A = (O_1 \cap A) \sqcup (O_2 \cap A)$. Supposons sans perte de généralité que $a \in O_1$. Soit $i \in I$, puisque $A_i = A \cap A_i = (O_1 \cap A_i) \sqcup (O_2 \cap A_i)$, que $a \in O_1 \cap A$ et que A_i est connexe, on a $O_2 \cap A_i = \emptyset$. Donc $O_2 \cap A = \bigcup_{i \in I} (O_2 \cap A_i) = \emptyset$. On a bien montré que A est connexe. ■

1.6.2 Connexes de $\mathbb{R}$

Proposition 1.90. On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Alors les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Démonstration. Montrons d'abord par contraposée que les connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles. Soit $A \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle alors il existe $a_1, a_2 \in A$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < x < a_2$ et $x \notin A$. On a alors $A = (]-\infty, x[\cap A) \sqcup (]x, +\infty[\cap A)$ avec $] -\infty, x[\cap A \neq \emptyset$ et $]x, +\infty[\cap A \neq \emptyset$. Donc A n'est pas un connexe.

Réciproquement, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que I n'est pas un connexe. Alors il existe O_1 et O_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $I = (O_1 \cap I) \sqcup (O_2 \cap I)$ avec $O_i \cap I \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Soient $a_1 \in O_1 \cap I$ et $a_2 \in O_2 \cap I$, sans perte de généralité on peut supposer que $a_1 < a_2$. Notons $S := \{x \in [a_1, a_2] : [a_1, x] \subset O_1\}$. Alors $a_1 \in S$ et S est majoré par a_2 donc $s := \sup S$ existe. Remarquons que nécessairement $a_1 \leq s \leq a_2$, d'où $s \in I \subset O_1 \cup O_2$ puisque I est un intervalle.

Premier cas : $s \in O_1$. Puisque O_1 est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subset O_1$. Par définition de s , il existe $b \in]s - \varepsilon, s[\cap S$. Mais alors $\left[a_1, s + \frac{\varepsilon}{2}\right] = [a_1, b] \cup \left[b, s + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset [a_1, b] \cup]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subset O_1$, i.e. $s + \frac{\varepsilon}{2} \in S$, d'où une contradiction.

Deuxième cas : $s \in O_2$. Puisque O_2 est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subset O_2$. Par définition de s , il existe $b \in]s - \varepsilon, s[\cap S$. Alors $b \in O_1 \cap O_2 \cap I$, d'où une contradiction. ■

Remarque 1.91. On déduit de la proposition précédente que le théorème des valeurs intermédiaires est un cas particulier de la Proposition 1.87.

1.6.3 Composantes connexes

Proposition 1.92. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Alors il existe un plus grand connexe de X contenant x . On l'appelle composante connexe de x .

Démonstration. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des connexes contenant x . Notons que $\{x\} \in \mathcal{F}$. Puisque $x \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$, on a que $\bigcup_{C \in \mathcal{F}} C$ est un connexe contenant x . Montrons que c'est le plus grand. Soit A un connexe contenant x alors $A \in \mathcal{F}$ d'où $A \subset \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C$. ■

Proposition 1.93. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Alors la composante connexe de x est un fermé.

Démonstration. Notons C la composante connexe de x . Puisque $\overline{C}$ est encore un connexe contenant x , on a $\overline{C} \subset C$. Donc $C = \overline{C}$ et C est un fermé. ■

Proposition 1.94. Soient X un espace topologique et $x, y \in X$. Notons respectivement C_x et C_y les composantes connexes de x et de y . Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ alors $C_x = C_y$.

Démonstration. Supposons que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, alors $C_x \cup C_y$ est un connexe. Puisque $C_x \cup C_y$ est un connexe contenant x , on a $C_x \subset C_x \cup C_y \subset C_x$, d'où $C_x = C_x \cup C_y$. De même $C_y = C_x \cup C_y$. Donc $C_x = C_y$. ■

Corollaire 1.95. Les composantes connexes de X forment une partition de X .

1.7 Topologie produit

Définition 1.96. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On appelle *topologie produit* la plus petite topologie sur $\prod_{i \in I} X_i$ telle que pour tout $i \in I$, $\text{pr}_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ est continue. Sauf mention explicite du contraire, ce sera toujours la topologie considérée sur un produit d'espaces topologiques.

Proposition 1.97. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i : \text{Pour tout } i \in I, U_i \text{ est un ouvert de } X_i \text{ et il existe } J \subset I \text{ fini tel que } \forall i \in I \setminus J, U_i = X_i \right\}$$

est une base de la topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$.

Proposition 1.98. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors, pour tout $i \in I$, $\text{pr}_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ est ouverte.

Proposition 1.99. Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\prod_{i \in I} X_i$ et $\ell \in \prod_{i \in I} X_i$. Alors x_n converge vers ℓ si et seulement si, pour tout $i \in I$, $(\text{pr}_i(x_n))_n$ converge vers $\text{pr}_i(\ell)$.

Remarque 1.100. Soit X un espace topologique, I un ensemble, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X^I et $f \in X^I$. Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f si et seulement si f_n converge vers f pour la topologie produit sur $X^I = \prod_{i \in I} X$.

Proposition 1.101. Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et Y un espace topologique. Alors $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $\text{pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ est continue.

Proposition 1.102. Un produit d'espaces topologiques séparés est séparé.

Le théorème suivant est équivalent à l'axiome du choix.

Théorème 1.103 (Théorème de Tychonoff). Un produit d'espaces topologiques quasi-compacts est quasi-compact.

Démonstration. **TODO** ■

Corollaire 1.104. Un produit d'espaces topologiques compacts est compact.

Exercices

Exercice 1.1. Combien y a-t-il de topologies sur un ensemble à 0, 1, 2 ou 3 éléments ?

Exercice 1.2 (Une topologie est caractérisée par ses voisinages).

- (1) Soit X un espace topologique et $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ l'application qui à $x \in X$ associe $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

Montrer que

- (i) $\forall x \in X, \mathcal{V}(x) \neq \emptyset$;
 - (ii) $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), x \in V$;
 - (iii) $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall W \in \mathcal{P}(X), V \subset W \implies W \in \mathcal{V}(x)$;
 - (iv) $\forall x \in X, \forall V, W \in \mathcal{V}(x), V \cap W \in \mathcal{V}(x)$;
 - (v) $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x), \forall y \in W, V \in \mathcal{V}(y)$.
- (2) Soit X un ensemble et $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ une application vérifiant (i)–(v).

On note $\mathcal{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in O, O \in \mathcal{V}(x)\}$.

- (a) Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X .
- (b) Soit $x \in X$. Montrer si $V \subset X$ est un voisinage de x pour $\mathcal{O}$ alors $V \in \mathcal{V}(x)$.
- (c) Soit $S \subset X$ et $O := \{x \in X : S \in \mathcal{V}(x)\}$. Montrer que $O \in \mathcal{O}$.
- (d) Soit $x \in X$. Montrer que tout $V \in \mathcal{V}(x)$ est un voisinage de x pour $\mathcal{O}$.

Exercice 1.3. Soit X un ensemble.

- (1) Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie sur X si et seulement si
 - (i) $X = \bigcup_{O \in \mathcal{B}} O$;
 - (ii) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ s'écrit comme union d'éléments de $\mathcal{B}$.
- (2) Montrer qu'une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant
 - (i) $X = \bigcup_{O \in \mathcal{B}} O$;
 - (ii') $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{B}, O_1 \cap O_2 \in \mathcal{B}$.
 est une base d'une topologie sur X .
- (3) Est-ce qu'une base d'une topologie sur X vérifie nécessairement (ii') ?

Exercice 1.4. Soit X un espace topologique séparable, i.e. admettant une partie dénombrable dense. Montrer que toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints est dénombrable.

Exercice 1.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si, pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 1.6. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ si et seulement si tout ouvert non vide de X contient un ouvert non vide ne rencontrant pas A .

Exercice 1.7. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (x, y) \text{ est une famille libre}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.8 (Théorème de Kuratowski).

- (1) Soit X un espace topologique.
 - (a) Montrer que pour toute partie A de X , on a $\overline{A^c}^c \subset A$.
 - (b) En déduire que pour toute partie A de X , on a $\overline{\overline{A^c}^c}^c = \overline{A^c}^c$.
 - (c) En déduire qu'à partir d'une partie A de X , on ne peut pas obtenir plus de 14 parties différentes en appliquant successivement le complémentaire et l'adhérence (en commençant soit par l'un, soit par l'autre).
- (2) Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle on atteint 14 parties.

Exercice 1.9. Soit X un espace topologique.

- (1) Montrer que si A et B sont deux ouverts disjoints de X alors $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{B}} = \emptyset$.
- (2) Montrer que si A et B sont deux fermés de X tels que $A \cup B = X$ alors $\overset{\circ}{\overline{A}} \cup \overset{\circ}{\overline{B}} = X$.

Exercice 1.10.

- (1) Montrer que si X est un espace topologique séparé alors pour $x \in X$, $\{x\}$ est un fermé.
- (2) Quid de la réciproque ?

Exercice 1.11. Soit X un espace topologique. On dit que $x \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ si pour tout voisinage V de x on a $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, N \geq n$ et $x_N \in V$.

- (1) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_p : p \geq n\}}$.
- (2) Montrer que toute limite est valeur d'adhérence.
- (3) Montrer que toute valeur d'adhérence d'une suite extraite est valeur d'adhérence.
- (4) Montrer que toute limite d'une suite extraite est valeur d'adhérence³.
- (5) Montrer que si X est séparé et si ℓ est limite de $(x_n)_n$ alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence.

Exercice 1.12 (Espace dénombrablement compact).

Soit X un espace topologique. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

- (i) Tout recouvrement dénombrable de X par des ouverts admet un sous-recouvrement fini ;
- (ii) Tout ensemble dénombrable de fermés d'intersection vide admet un sous-ensemble fini d'intersection vide ;
- (iii) Toute suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide ;
- (iv) Toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence ;
- (v) Toute partie infinie de X admet un point d'accumulation.

Indication : on pourra montrer que chaque énoncé est équivalent au suivant.

Exercice 1.13. Soit X un espace séparé. Montrer que si $A, B \subset X$ sont deux compacts disjoints alors il existe U et V deux ouverts tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 1.14. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues avec Y séparé. Montrer que si f et g coïncident sur une partie dense, i.e. $\overline{\{x \in X : f(x) = g(x)\}} = X$, alors $f = g$.

Exercice 1.15. Soient X un espace topologique quasi-compact et Y un espace topologique séparé.

- (1) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ une application continue alors f est fermée (i.e. l'image d'un fermé est un fermé).
- (2) En déduire que si $f : X \rightarrow Y$ est une bijection continue alors f^{-1} est continue.

Exercice 1.16. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si $g : X \rightarrow \Gamma_f$, défini par $g(x) := (x, f(x))$, est un homéomorphisme où $\Gamma_f \subset X \times Y$ est le graphe de f muni de la topologie induite par la topologie produit sur $X \times Y$.

Exercice 1.17. Soit X un espace topologique. Montrer que X est homéomorphe à $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ comme sous-espace de $X \times X$ pour la topologie produit.

Exercice 1.18. Soit X un espace topologique. Montrer que X est séparé si et seulement si $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$ pour la topologie produit.

Exercice 1.19. Soient X et Y deux espaces topologiques.

- (1) Montrer que si Y est quasi-compact alors la projection $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$ est une application fermée.
- (2) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est continue et que Y est séparé alors le graphe de f est un fermé de $X \times Y$.
- (3) Montrer que si Y est compact alors une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si son graphe est un fermé de $X \times Y$ pour la topologie produit.

Exercice 1.20. Montrer qu'un ensemble infini est un espace connexe pour la topologie cofinie.

Exercice 1.21. Montrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si pour toute partie $\emptyset \neq A \subsetneq X$, on a $\partial A \neq \emptyset$.

³On verra que la réciproque est vraie dans un espace métrique, cf Exercice 2.13.

Exercice 1.22 (Don't overthink...). Est-ce qu'une intersection quelconque de fermés denses est dense ?

Exercice 1.23 (Topologie produit). Montrer les propositions concernant la topologie produit (sauf le théorème de Tychonoff)

Exercice 1.24 (Topologie des boîtes). Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.

- (1) Montrer qu'il existe une topologie sur $\prod_{i \in I} X_i$ dont une base est $\mathcal{B} := \{\prod_{i \in I} U_i : U_i \text{ ouvert de } X_i\}$. On l'appelle *topologie des boîtes*.
- (2) Montrer que si I est fini alors la topologie boîte et la topologie produit coïncident.
- (3) Montrer que si les X_i sont séparés alors $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé pour la topologie des boîtes.
- (4) (a) On considère $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète. Montrer que la topologie des boîtes sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$ coïncide avec la topologie discrète.
 (b) Conclure qu'un produit d'espaces quasi-compacts n'est pas nécessairement quasi-compact pour la topologie des boîtes.

Exercice 1.25 (Topologie quotient). Soient X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X . On appelle *topologie quotient* la plus petite topologie sur $X/\sim$ telle que l'application naturelle $p : X \rightarrow X/\sim$ soit continue.

- (1) Montrer que $O \subset X/\sim$ est un ouvert de $X/\sim$ si et seulement si $p^{-1}(O)$ est un ouvert de X .
- (2) Soit Y un espace topologique. Montrer que $f : X/\sim \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f \circ p : X \rightarrow Y$ l'est.
- (3) Montrer que si X est quasi-compact (resp. connexe) alors $X/\sim$ l'est aussi.
- (4) *La droite à deux origines*. On considère $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ muni de la relation $\sim$ définie par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, (x, 0) \sim (x, 1)$.
 (a) Montrer que $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ est séparé.
 (b) Montrer que $\mathbb{R} \times \{0, 1\}/\sim$ n'est pas séparé.
 (c) Montrer que dans un espace non séparé, l'intersection de deux compacts peut ne pas être quasi-compact.
- (5) On suppose que $p : X \rightarrow X/\sim$ est ouverte. Montrer que $X/\sim$ est séparé si et seulement si $\sim$ est un fermé de $X \times X$.
- (6) On suppose que X est compact. Montrer que $X/\sim$ est séparé si et seulement si $\sim$ est un fermé de $X \times X$ si et seulement si p est fermée.
- (7) Soient Y un espace topologique et $g : X \rightarrow Y$ continue.
 Montrer que si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \sim x_2 \implies g(x_1) = g(x_2)$ alors il existe $\tilde{g} : X/\sim \rightarrow Y$ continue telle que $g = \tilde{g} \circ p$.
- (8) On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la relation $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$. Montrer que $\mathbb{R}^2/\sim$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
- (9) On considère $[0, 1]$ (comme sous-espace de $\mathbb{R}$) muni de la relation $0 \sim 1$. Montrer que $[0, 1]/\sim$ est isomorphe à S^1 .

2 Espaces métriques

2.1 Distances et boules

Définition 2.1. Une *distance* sur un ensemble X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

Un *espace métrique* est la donnée d'un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X .

Proposition 2.2. Soit $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une distance, alors $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$.

Démonstration. Soient $x, y \in X$. On a alors $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$ d'où $d(x, y) \geq 0$. ■

Exemples 2.3. • $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(x, y) := |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

- Soit X un ensemble alors $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon est une distance que l'on appelle *distance discrète*.

Proposition 2.4. Soient (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$. Alors la restriction $d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une métrique sur Y . On dit que $(Y, d|_{Y \times Y})$ est un sous-espace métrique de (X, d) et que $d|_{Y \times Y}$ est la distance induite sur Y par d .

Définition 2.5. Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On note

- $B(a, r) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$ la *boule ouverte* centrée en a de rayon r ;
- $B_f(a, r) := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ la *boule fermée* centrée en a de rayon r ;
- $S(a, r) := \{x \in X : d(a, x) = r\}$ la *sphère* centrée en a de rayon r .

2.2 Topologie d'un espace métrique

Proposition 2.6. Soit (X, d) un espace métrique. Alors $\mathcal{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset O\}$ est une topologie sur X .

Remarque 2.7. Sauf mention explicite du contraire, la topologie considérée sur un espace métrique sera toujours celle de l'énoncé précédent.

Exemples 2.8. • $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(x, y) := |x - y|$ induit la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

- Soit X un ensemble alors $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon induit la topologie discrète sur X .

Proposition 2.9. Soient (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$. Alors $(Y, d|_{Y \times Y})$ est un sous-espace topologique de (X, d) , i.e. la topologie induite sur Y par la distance $d|_{Y \times Y}$ coïncide avec la topologie induite en tant que sous-espace topologique.

Proposition 2.10. Soit (X, d) un espace métrique.

- Une boule ouverte est un ouvert.
- Une boule fermée est un fermé.
- Une sphère est un fermé.
- L'ensemble des boules ouvertes de X forment une base de la topologie induite par d .
- Une partie V de X est un voisinage de x si et seulement si $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset V$.
- Soit $x \in X$. Alors $\mathcal{V} := \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ est une base dénombrable de voisinages de x .

Remarque 2.11. Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On a $\overline{B(a, r)} \subset B_f(a, r)$ mais il se peut que cette inclusion soit stricte.

Considérons X un ensemble ayant au moins deux éléments muni de la distance discrète. Soit $x \in X$, alors $\overline{B(x, 1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \subsetneq X = B_f(x, 1)$.

En revanche, nous verrons qu'il y a toujours égalité dans les espaces vectoriels normés, voir Proposition 3.10.

Proposition 2.12. *Un espace métrique est toujours séparé.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$ avec $x \neq y$. Posons $\delta := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$ alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\delta = d(x, y)$, d'où une contradiction. Donc $B(x, \delta) \cap B(y, \delta) = \emptyset$. ■

2.3 Limites et continuité

Proposition 2.13. *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in X$. La suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies d(x_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.14. Puisqu'un espace métrique est séparé, si une suite admet une limite alors cette dernière est unique.

La proposition suivante est une réciproque de 1.52 dans les espaces métriques : on en déduit une caractérisation séquentielle des fermés.

Proposition 2.15. *Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in X$. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .*

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$. Vérifions que $(x_n)_n$ converge vers x . Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N+1} \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N$, on a donc $d(x, x_n) < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} \leq \varepsilon$. Donc $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A qui converge vers a . ■

Corollaire 2.16. *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors A est un fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge dans A .*

Proposition 2.17. *Soient $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une application entre deux espaces métriques et $x_0 \in X$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d_X(x, x_0) \leq \eta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

La proposition suivante est une caractérisation séquentielle de la continuité dans les espaces métriques (voir Proposition 1.63 et Remarque 1.64).

Proposition 2.18. *Soit $f : (X, d) \rightarrow Y$ où (X, d) est un espace métrique et Y un espace topologique. Soit $x \in X$, alors f est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x , $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. L'implication directe découle de la proposition 1.63. Montrons contraposée de la réciproque. On suppose que f n'est pas continue en x . Alors il existe V un voisinage de $f(x)$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists y \in X, d(x, y) \leq \eta \text{ et } f(y) \notin V.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $x_n \in X$ tel que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n+1}$ et $f(x_n) \notin V$. Alors la suite $(x_n)_n$ converge vers x mais $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. ■

2.4 Compacité

Définition 2.19. On dit qu'une partie A d'un espace métrique (X, d) est bornée s'il existe $C > 0$ tel que $\forall a_1, a_2 \in A, d(a_1, a_2) \leq C$.

Proposition 2.20. *Une partie d'un espace métrique est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (ouverte ou fermée).*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Supposons que A soit bornée. Alors il existe $C > 0$ tel que $\forall a_1, a_2 \in A, d(a_1, a_2) \leq C$. Si $A = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer qu'il existe $a \in A$. Soit $x \in A$ alors $d(a, x) \leq C$ donc $A \subset B_f(a, C)$ et $A \subset B(a, C + 1)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subset B_f(x, r)$. Soient $a_1, a_2 \in A$ alors $d(a_1, a_2) \leq d(a_1, x) + d(a_2, x) \leq 2r$. Donc A est bornée. ■

Proposition 2.21. *Une partie compacte d'un espace métrique est fermée et bornée.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ un compact. Si $K = \emptyset$ alors K est borné. On peut donc supposer qu'il existe $a \in K$. Alors $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a, n+1)$. Par compacité, il existe $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^r B(a, n_k)$. Posons $N := \max(n_1, \dots, n_r)$. Alors $K \subset B(a, N+1)$. Donc K est bornée.

Puisque la topologie induite par d est séparée, on déduit de la Proposition 1.77 que K est un fermé. ■

Remarque 2.22. On verra dans la suite que la réciproque est vraie pour les espaces vectoriels normés de dimension finie (Proposition 3.20). Elle est généralement fausse, déjà pour tous les espaces vectoriels normés de dimension infinie (toujours Proposition 3.20).

Dans les espaces métriques, la compacité admet la caractérisation séquentielle suivante.

Théorème 2.23. *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors A est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans A .*

Remarque 2.24. Si X est un espace topologique quelconque, les deux implications peuvent être fausses.

Considérons $X := [0, 1]^{[0,1]}$ alors X est compact d'après le théorème de Tychonoff. Montrons que X n'est pas séquentiellement compact. Considérons $(f_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ où $f_n(x)$ est le n -ème chiffre de l'écriture dyadique de x . Supposons qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge. Posons $x := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\varphi(2k+1)}$ alors $f_{\varphi(n)}(x) = 1$ si n est impair et $f_{\varphi(n)}(x) = 0$ sinon. D'où une contradiction.

Réciproquement, considérons $X := \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{R}} : f^{-1}(1) \text{ est dénombrable}\}$ pour la topologie induite. Soit $(f_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$. Posons $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(1)$ alors S est dénombrable et $(f_n)_n$ est une suite de $\{0\}^{\mathbb{R} \setminus S} \times \{0, 1\}^S$ qui est métrisable (voir Exercice 2.3) et compact (par le théorème de Tychonoff) donc $(f_n)_n$ admet une sous-suite convergente. En revanche, X n'est pas compact (on peut vérifier que X est dense dans l'espace compact $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$).

Remarque 2.25. Attention, on demande bien que la limite de la sous-suite soit dans A . Par exemple, si on considère $(\mathbb{R}, d(x, y) := |x - y|)$ alors toute suite d'éléments de $(-1, 1)$ admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano–Weierstraß mais $(-1, 1)$ n'est pas compact puisque ce n'est pas un fermé.

Lemme 2.26. *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ et $x \in X$.*

Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon\}$ est infini alors $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente vers x .

Démonstration. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon\}$ est infini. Construisons par récurrence une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{1}{n+1}$.

Puisque $E_1 \neq \emptyset$, il existe $\varphi(0) \in E_1$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, x) < 1$.

Supposons $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ déjà construits. Puisque $E_{\frac{1}{n+2}}$ est infini, il existe $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \text{ et } d(x_{\varphi(n+1)}, x) < \frac{1}{n+2}.$$

On vérifie ensuite aisément que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x . ■

Lemme 2.27. *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ telle que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans A . Si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ alors*

$$\exists r > 0, \forall x \in A, \exists i \in I, B(x, r) \subset O_i.$$

Démonstration. Soit $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Supposons par l'absurde que $\forall r > 0, \exists x \in A, \forall i \in I, B(x, r) \cap O_i^c \neq \emptyset$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $x_n \in A$ tel que pour tout $i \in I, B(x_n, \frac{1}{n+1}) \cap O_i^c \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in A$. Il existe $i \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x, \varepsilon) \subset O_i$.

Puisque $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x , il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $d(x, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N_2+1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N := \max(N_1, N_2)$. Soit $y \in B(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)+1})$ alors

$$d(x, y) \leq d(x, x_{\varphi(N)}) + d(x_{\varphi(N)}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varphi(N)+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N_2+1} < \varepsilon.$$

Ainsi $B(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)+1}) \subset B(x, \varepsilon) \subset O_i$. D'où une contradiction. ■

Démonstration du Théorème 2.23.

Supposons que A soit un compact. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A .

Supposons par l'absurde que $(x_n)_n$ n'admette pas de sous-suite convergente dans A , alors, d'après le premier lemme, pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon_x)\}$ est fini.

Puisque $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$, il existe $x_1, \dots, x_r \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^r B(x_i, \varepsilon_{x_i})$.

Donc $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^r \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x_i, \varepsilon_{x_i})\}$, d'où une contradiction puisque l'ensemble de droite est fini.

Réciproquement, supposons que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans A . Puisque X est séparé, il suffit de montrer que A est quasi-compact.

Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. D'après le deuxième lemme, il existe $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in A, \exists i \in I, B(x, r) \subset O_i$.

Supposons par l'absurde que $(O_i)_{i \in I}$ n'admette pas de sous-recouvrement fini. On peut donc construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{i=0}^n B(x_i, r).$$

Par hypothèse, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $x \in A$. Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $d(x, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{r}{3}$. On a donc $d(x_{\varphi(N)}, x_{\varphi(N+1)}) \leq d(x_{\varphi(N)}, x) + d(x_{\varphi(N+1)}, x) \leq \frac{2}{3}r < r$. Sauf que $d(x_{\varphi(N)}, x_{\varphi(N+1)}) > r$ par construction. D'où une contradiction. ■

2.5 Complétude

2.5.1 Suites de Cauchy

Définition 2.28. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.29. Une suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d) convergeant vers $\ell \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $d(x, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \geq N$ alors $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) \leq \varepsilon$.

Donc $(x_n)_n$ est bien une suite de Cauchy. ■

Proposition 2.30. Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Dans ce cas, puisqu'un espace métrique est séparé, on déduit de la Proposition 1.55 que la suite et la sous-suite ont même limite.

Démonstration. La première implication est claire, montrons la réciproque.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d) . Supposons qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $\ell \in X$. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, si $p, q \geq N_1$ alors $d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Puisque $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ , il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_2$ alors $d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N := \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, alors $d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq \varepsilon$.

Donc $(x_n)_n$ converge vers ℓ . ■

2.5.2 Espaces complets

Définition 2.31. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On dit que A est un *complet* de X si toute suite d'éléments de A converge **dans** A .

On dit que X est un *espace complet* si X est un complet de X .

Proposition 2.32. *Un compact est un complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy d'éléments d'un compact admet une sous-suite qui converge dans le compact, donc elle converge dans le compact d'après la Proposition 2.30. ■

Proposition 2.33. *Un complet est un fermé.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et A un complet. Soit $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in X$. Ainsi $(x_n)_n$ est de Cauchy et converge donc dans A . Puisqu'un espace métrique est séparé, on a forcément $\ell \in A$. Donc A est un fermé d'après le Corollaire 2.16. ■

Proposition 2.34. *L'intersection d'un complet et d'un fermé est un complet.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique, A un complet et F un fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $A \cap F$. Puisque A est complet, $(x_n)_n$ converge vers $\ell \in A$. Puisque F est fermé, on a forcément $\ell \in F$. Donc $A \cap F$ est un complet. ■

Corollaire 2.35. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Les fermés de X sont exactement les complets de X .*

2.5.3 Le théorème du point fixe de Banach–Picard

Théorème 2.36. *Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \rightarrow X$ une application contractante, i.e.*

$$\exists k \in [0, 1[, \forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe, i.e. il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. On vérifie aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$ alors

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) = \sum_{i=m}^{n-1} k^i d(x_1, x_0) = \frac{k^m - k^n}{1 - k} d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_1, x_0) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et elle converge donc vers $x \in X$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$d(f(x), x) \leq d(f(x), f(x_n)) + d(f(x_n), x_n) + d(x_n, x) \leq kd(x, x_n) + k^n d(x_1, x_0) + d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $d(f(x), x) = 0$, i.e. $f(x) = x$.

Montrons l'unicité. Supposons par l'absurde qu'il existe un autre $y \in X$ tel que $y \neq x$ et $f(y) = f(x)$. Alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, d'où $k \geq 1$. On obtient ainsi une contradiction. ■

Remarque 2.37. Le résultat n'est plus vrai pour $k = 1$ comme on peut s'en convaincre en considérant $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ défini par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Il est néanmoins vrai lorsque l'inégalité est stricte et que le domaine est compact, voir l'exercice 2.17.

2.5.4 Lemme de Baire

Théorème 2.38. *Dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique complet et $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{O_n} = X$. On note $S := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Soient $x \in X$ et V un voisinage ouvert de x .

On va construire par récurrence une suite $(x_n, r_n) \in (X \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 < r_n \leq \frac{1}{2^n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, B_f(x_n, r_n) \subset O_n \cap V \\ \forall n \in \mathbb{N}, B_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B_f(x_n, r_n) \end{cases}$$

Puisque $x \in X = \overline{O_0}$, il existe $x_0 \in O_0 \cap V$. Puisque $O_0 \cap V$ est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset O_0 \cap V$. En posant $r_0 := \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$, on a $B_f(x_0, r_0) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset O_0 \cap V$ et $0 < r_0 \leq 1$.

Supposons $x_0, \dots, x_n$ déjà construits. Puisque $x_n \in X = \overline{O_{n+1}}$, il existe $x_{n+1} \in B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$. Puisque $B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_{n+1}, \varepsilon) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$.

En posant $r_{n+1} := \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$, on a

- $B_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, \varepsilon) \subset B(x_n, r_n) \subset B_f(x_n, r_n)$;
- $B_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, \varepsilon) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \subset B_f(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \subset V \cap O_{n+1}$ et
- $0 < r_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$ alors

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2^{-m+1} - 2^{-n+1} \leq 2^{-m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, et converge donc vers $\ell \in X$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque pour $n \geq m$, $x_n \in B_f(x_m, r_m)$ fermé, on a que $\ell \in B_f(x_m, r_m) \subset O_m \cap V$. Donc $\ell \in S \cap V$ et ainsi $S \cap V \neq \emptyset$. Donc $x \in \overline{S}$. On a bien montré que $X = \overline{S}$. ■

En passant au complémentaire, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.39. *Si un espace métrique complet non vide est réunion d'une famille dénombrable de fermés, alors au moins un de ces fermés est d'intérieur non vide.*

2.6 Espaces métriques produits

Proposition 2.40. *Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques. Soit $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une norme croissante pour l'ordre produit⁴.*

Alors $d : \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = N(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n))$ est une distance sur $\prod_{i=1}^n X_i$ dont la topologie coïncide avec la topologie produit.

Démonstration. Posons $X := \prod_{i=1}^n X_i$. Commençons par montrer que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance.

- Soient $x, y \in X$ tels que $d(x, y) = 0$.
Alors $N(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) = 0$ d'où $\forall i = 1, \dots, n, d_i(x_i, y_i) = 0$ i.e. $\forall i = 1, \dots, n, x_i = y_i$.
Donc $x = y$.
- Soit $x \in X$ alors $d(x, x) = N(d_1(x_1, x_1), \dots, d_n(x_n, x_n)) = N(0) = 0$.
- Soient $x, y \in X$.
Alors $d(x, y) = N(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) = N(d_1(y_1, x_1), \dots, d_n(y_n, x_n)) = d(y, x)$.

⁴Si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq y_i$ alors $N(x) \leq N(y)$. Par exemple $\|\cdot\|_p$ pour $p \geq 1$ ou $p = \infty$.

- Soient $x, y, z \in X$. Alors

$$\begin{aligned}
 d(x, z) &= N(d_1(x_1, z_1), \dots, d_n(x_n, z_n)) \\
 &\leq N(d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1), \dots, d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)) \\
 &\quad \text{par inégalité triangulaire des distances } d_i \text{ et croissance de } N \\
 &\leq N(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) + N(d_1(y_1, z_1), \dots, d_n(y_n, z_n)) \\
 &\quad \text{par inégalité triangulaire de } N \\
 &= d(x, y) + d(y, z)
 \end{aligned}$$

Donc d est une distance sur X .

Montrons qu'un ouvert de (X, d) est un ouvert pour la topologie produit. Soit O un ouvert de (X, d) . Soit $x \in O$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset O$.

Posons $\eta := \frac{\varepsilon}{2N(1, \dots, 1)}$. Soit $y \in \prod_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, \eta)$ alors

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= N(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) \\
 &\leq N(\eta, \dots, \eta) \text{ par croissance de } N \\
 &= \eta N(1, \dots, 1) \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc $x \in \prod_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, \eta) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset O$. Ainsi O est un ouvert pour la topologie produit.

Montrons qu'un ouvert de X pour la topologie produit est un ouvert pour d . Soit O un ouvert de X pour la topologie produit. Soit $x \in O$. Alors il existe des ouverts U_i de X_i tels que $x \in \prod_{i=1}^n U_i \subset O$. Pour $i = 1, \dots, n$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B_{d_i}(x_i, \varepsilon_i) \subset U_i$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leq \alpha N(\cdot)$.

Soit $\eta := \frac{\min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}{\alpha}$. Soit $y \in B_d(x, \eta)$ alors

$$d_i(x_i, y_i) \leq \|(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n))\|_\infty \leq \alpha N(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) = \alpha d(x, y) < \alpha \eta \leq \varepsilon_i.$$

Donc $x \in B_d(x, y) \subset \prod_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, \varepsilon_i) \subset \prod_{i=1}^n U_i \subset O$. Donc O est un ouvert pour d . ■

Remarque 2.41. Nous verrons dans l'exercice 2.3 qu'un produit infini dénombrable d'espaces métriques est métrisable (i.e. admet une distance donnant la topologie produit) mais que ce n'est jamais le cas pour un produit infini non dénombrable d'espaces métriques contenant au moins deux éléments.

Proposition 2.42. *Un produit fini d'espaces complets est complet.*

Exercices

Exercice 2.1. On considère $X :=]0, +\infty[$. Et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(x, y) := \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.

- (1) Montrer que d est une distance sur X .
- (2) Déterminer $B(1, 1)$.
- (3) La partie $A =]0, 1]$ est-elle bornée? est-elle fermée?
- (4) Soient $a \in X$ et $r > 0$. Déterminer $B(a, r)$.

Indication : on pourra distinguer les cas $r \geq \frac{1}{a}$ et $r < \frac{1}{a}$.

Exercice 2.2 (Comparaison de distances).

On dit que deux distances $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $d_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sont fortement équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x, y \in X, \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$.

- (1) Montrer que l'équivalence forte est une relation d'équivalence.
- (2) Montrer que deux distances fortement équivalentes définissent la même topologie.
- (3) Montrer que $d_\infty(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$, $d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ et $d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ sont trois distances fortement équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.
- (4) (a) Montrer que si $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance sur un ensemble X alors $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ est une distance sur X .
 (b) Montrer que d et δ définissent la même topologie.
 (c) Deux distances définissant la même topologie sont-elles nécessairement fortement équivalentes?
- (5) Même question avec $\delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

Exercice 2.3 (Produit infini dénombrable d'espaces métriques).

- (1) Soient $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques.
 (a) Montrer que $d : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d((x_n)_n, (y_n)_n) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$ est une distance.
Indication : on pourra utiliser l'exercice précédent.
 (b) Montrer que d induit la topologie produit.
 (c) Montrer que si les X_n sont complets alors $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est complet.
- (2) Soient $((X_i, d_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces métriques telle que $\forall i \in I, \#X_i > 1$ et I n'est pas dénombrable. Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\prod_{i \in I} X_i$ induisant la topologie produit.
Indication : on pourra montrer que le produit n'admet pas de base dénombrable de voisinages.

Exercice 2.4. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 2.5 (Espaces ultramétriques).

On considère (X, d) un espace ultramétrique, i.e. un ensemble X muni une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$ (inégalité ultratriangulaire).

- (1) Montrer que d est une distance.
- (2) Soient $a, a' \in X$ et $0 < r \leq r'$. Si $B(a, r) \cap B(a', r') \neq \emptyset$ alors $B(a, r) \subset B(a', r')$.
- (3) Montrer que tout point d'une boule ouverte en est un centre.
- (4) Montrer que toute boule ouverte est un fermé.
- (5) Montrer que toute boule fermée est un ouvert.
- (6) Montrer qu'une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Continuons avec quelques exemples.

- (7) Montrer que tout ensemble est un espace ultramétrique pour la distance discrète.
- (8) Soit E un ensemble. Montrer que $X := E^{\mathbb{N}}$ est un espace ultramétrique pour $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) := \frac{1}{1 + \inf\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}}$.
- (9) Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Q}$ est un espace ultramétrique pour $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) := p^{-v_p(x-y)}$.

Exercice 2.6. Montrer que dans un espace métrique, tout fermé s'écrit comme intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 2.7. Montrer qu'on ne peut pas munir un ensemble infini d'une métrique induisant la topologie cofinie.

Exercice 2.8. Soit (X, d) un espace métrique, Y un espace topologique séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si sa restriction à tout compact est continue.

Exercice 2.9. (1) Montrer que si un espace topologique est compact alors toute partie de cardinal infini admet un point d'accumulation.

Indication : on pourra utiliser l'exercice 1.12.

(2) Montrer que la réciproque est fautive en général.

(3) Montrer que la réciproque est vraie dans un espace métrique.

Exercice 2.10 (Espaces précompacts). On dit qu'un espace métrique (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, X admet un recouvrement par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε .

(1) Montrer qu'un espace précompact est borné.

(2) (a) Montrer qu'un espace métrique précompact admet une base dénombrable.

(b) En déduire qu'un espace métrique précompact est séparable, i.e. admet une partie dénombrable dense.

(3) Montrer qu'un espace métrique est précompact si et seulement si toute suite admet une sous-suite de Cauchy.

Indications : étant donnée une suite $(x_n)_n$ de X , on pourra construire une suite décroissante de parties $S_k \subset X$ telle que pour tout k , S_k est inclus dans une boule de diamètre 2^{-k} et $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in S_k\}$ est infini. Pour la réciproque, on pourra montrer sa contraposée.

(4) En déduire qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

Exercice 2.11 (Suites de Cauchy et continuité uniforme).

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in X, d_X(x_1, x_2) \leq \eta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon.$$

(1) Montrer qu'une application uniformément continue est continue.

(2) Montrer que la réciproque est généralement fautive.

(3) Montrer qu'une application continue sur un compact est uniformément continue (*théorème de Heine*).

(4) Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de X et que $f : X \rightarrow Y$ est uniformément continue alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de Y .

(5) On suppose que Y est complet. Soit $A \subset X$. Montrer que toute application uniformément continue $A \rightarrow Y$ se prolonge de façon unique en une application continue $\overline{A} \rightarrow Y$.

Exercice 2.12. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de X . On suppose que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

Montrer que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 2.13 (Démonstration alternative de la caractérisation séquentielle de la compacité dans un espace métrique). Soit (X, d) un espace métrique.

(1) Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que ℓ est valeur d'adhérence⁵ de $(x_n)_n$ si et seulement si $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergeant vers ℓ .

(2) En déduire que toute suite à valeurs dans un compact $K \subset X$ admet une sous-suite convergeant dans K .

Indication : voir l'exercice 1.12.

⁵Voir l'exercice 1.11.

Exercice 2.14 (Propriété des fermés emboîtés). Soit (X, d) un espace métrique.

Pour $A \subset X$, on note $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, +\infty]$ le diamètre de A .

On dit que (X, d) vérifie la propriété des fermés emboîtés si pour toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_n$ dont le diamètre tend vers 0, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

- (1) Montrer qu'un espace métrique complet vérifie la propriété des fermés emboîtés.
- (2) Réciproquement, montrer qu'un espace métrique vérifiant la propriété des fermés emboîtés est complet.

Indication : on pourra utiliser les exercices 1.11 et 2.13.

Exercice 2.15 (Distance à une partie). Soit (X, d) un espace métrique.

On fixe A une partie non vide de X . Pour $x \in X$, on note $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

- (1) Montrer que $\forall x \in X, d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
- (2) Montrer que $d(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.
- (3) En déduire que si A est fermé et que si B est un compact tel que $A \cap B = \emptyset$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (a, b) \in A \times B, d(a, b) > \delta$.
- (4) Montrer le résultat de la question précédente n'est plus vrai si B est un fermé qui n'est pas compact.

Exercice 2.16 (Distance de Hausdorff). Soit (X, d) un espace métrique non vide. Pour $A, B \subset X$ deux parties non vides et bornées, on définit la distance de Hausdorff entre A et B par

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B) \right\}.$$

- (1) Montrer que pour $A, B \subset X$ non vides et bornées, $d_H(A, B) \in \mathbb{R}$.
- (2) Montrer que pour $A, B \subset X$ non vides et bornées, $d_H(A, B) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|$.
- (3) Pour $A \subset X$ et $\varepsilon > 0$, on définit l'épaississement de rayon r de A par $A_\varepsilon := \bigcup_{a \in A} B_f(a, \varepsilon)$.
Montrer que pour $A, B \subset X$ non vides et bornées, on a $d_H(A, B) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon \}$.
- (4) Soient $A, B \subset X$ deux parties non vides et bornées.
On note $\varepsilon := d_H(A, B)$. Montrer que $A \subset \overline{B_\varepsilon}$ et $B \subset \overline{A_\varepsilon}$.
- (5) Soient $A, B \subset X$ deux parties non vides et bornées telles que $d_H(A, B) = 0$. Montrer que $\overline{A} = \overline{B}$.
- (6) On note $\mathcal{B} := \{ A \in \mathcal{P}(X) : A \neq \emptyset, A \text{ bornée et fermée} \}$.
Montrer que $d_H : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance.
- (7) On suppose que (X, d) est complet. L'objectif est de montrer que $(\mathcal{B}, d_H)$ l'est aussi.

Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}, d_H)$.

On note $\mathcal{L} := \{ x \in X : \text{il existe } (x_n)_n \in X^\mathbb{N} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A_n \text{ et } x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \}$ l'ensemble des limites des suites $(x_n)_n \in X^\mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A_n$.

- (a) Montrer que $\mathcal{L} \neq \emptyset$.
- (b) Montrer que $\mathcal{L}$ est fermé.
Indication : on pourra considérer une suite de suites puis étudier la suite diagonale.
- (c) Montrer que $\mathcal{L}$ est borné.
Indication : on pourra utiliser que $(A_n)_n$ est de Cauchy et que si $d_H(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ alors $A_n \subset (A_m)_\varepsilon$.
- (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \mathcal{L}$.
Indication : étant donné $\varepsilon > 0$, on pourra montrer que $A_n \subset \mathcal{L}_\varepsilon$ et $\mathcal{L} \subset (A_n)_\varepsilon$ pour n assez grand.
- (e) Conclure.
- (8) On suppose que (X, d) est compact. L'objectif est de montrer que $(\mathcal{B}, d_H)$ l'est aussi.
 - (a) Montrer que $(\mathcal{B}, d_H)$ est complet.
 - (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
 - i. Justifier qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{k=1}^n B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.
Pour $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $I \neq \emptyset$, on note $\mathcal{F}_I := \bigcup_{i \in I} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.
 - ii. Montrer que pour $A \in \mathcal{B}$, il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $I \neq \emptyset$ et $A \subset \mathcal{F}_I$.
 - iii. Montrer que $d_H(A, \mathcal{F}_I) < \varepsilon$.
 - iv. En déduire que $(\mathcal{B}, d_H)$ est précompact (voir l'exercice 2.10).
 - (c) Conclure. *Indication : utiliser l'exercice 2.10.*

Exercice 2.17 (Un autre théorème du point fixe).

- (1) Soient K une partie compacte d'un espace métrique (X, d) et $f : K \rightarrow K$ une application continue vérifiant

$$\forall x, y \in K, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y). \quad (\text{H})$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Indication : on pourra considérer $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = d(x, f(x))$.

- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 1$ si $x \leq 0$.
- (a) Montrer que f est continue et vérifie (H) pour la valeur absolue.
 - (b) Montrer que f n'admet pas de point fixe.
 - (c) Y a-t-il une contradiction avec le résultat de la première question?

Exercice 2.18 (Complétion d'un espace métrique).

On appelle complété d'un espace métrique (X, d) un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ tel qu'il existe $\iota : X \rightarrow \hat{X}$ telle que $\forall x, y \in X, \hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$ et $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$.

- (1) Montrer qu'alors ι est une injection continue.
- (2) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est une application uniformément continue où Y est un espace métrique complet, alors il existe une application uniformément continue $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow Y$ telle que $f = \hat{f} \circ \iota$.

Indication : on pourra utiliser l'exercice 2.11.

- (3) En déduire que le complété d'un espace métrique, s'il existe, est unique à isométrie près.
- (4) L'objectif de cette question est de montrer l'existence du complété⁶. On note C l'ensemble des suites de Cauchy de X .
 - (a) Montrer que $\delta : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta((x_n)_n, (y_n)_n) := \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n)$ est bien définie.
 - (b) Montrer que δ induit une distance $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sur $\hat{X} := C/\sim$ où $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \delta((x_n)_n, (y_n)_n) = 0$.
 - (c) Montrer que $\iota : X \rightarrow \hat{X}$ qui à x associe la classe d'équivalence de la suite constante égale à x est une isométrie.
 - (d) Montrer que $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$.
 - (e) Montrer que $\hat{X}$ est complet.

Indication : pour $(\alpha_n)_n$ une suite de Cauchy de $\hat{X}$, on peut associer une suite $(x_n)_n$ de E vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \hat{d}(\iota(x_n), \alpha_n) \leq \frac{1}{n+1}$.
 - (f) Conclure.

⁶Une autre approche qui utilise que l'espace vectoriel normé des fonctions bornées $B(X)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ consiste à considérer l'isométrie $\iota : X \rightarrow B(X)$ définie par $\iota(x) : y \mapsto d(x, y) - d(a, y)$ pour $a \in X$ fixé.

3 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés dans ce cours sont tous réels, i.e. le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

3.1 Définitions

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel.

On appelle *norme* sur E une fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (ii) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$
- (iii) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*)

On appelle *espace vectoriel normé* un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Proposition 3.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors

- (1) $\|0\| = 0$,
- (2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
- (3) $\forall x, y \in E, |||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (*inégalité triangulaire inversée*).

Démonstration. (1) Pour éviter toute confusion, on note $\mathbf{0} \in E$ et $0 \in \mathbb{R}$. Alors $\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot \mathbf{0}\| = |0| \|\mathbf{0}\| = 0$.

(2) Soit $x \in E$ alors $0 = \|\mathbf{0}\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1| \|x\| = 2\|x\|$, d'où $\|x\| \geq 0$.

(3) Soient $x, y \in E$ alors $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ d'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

De même, on a $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\|$.

Donc $|||x\| - \|y\|| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) \leq \|x - y\|$. ■

Proposition 3.3. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F , appelée *norme induite*.

Exemples 3.4. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^d$.

(1) $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|(x_1, \dots, x_d)\|_p := \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p}$, où $p \geq 1$,

(2) $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|(x_1, \dots, x_d)\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_d|)$.

On vérifie aisément que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.

Concernant $\|\cdot\|_p$, lorsque $p > 1$, on pourra consulter l'exercice 3.6.

La norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 3.5. Soit X un ensemble. On considère E l'espace vectoriel des fonctions $X \rightarrow \mathbb{R}$ bornées.

On définit $\|\cdot\|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E . Elle s'appelle *norme de convergence uniforme* puisque $(f_n)_n$ tend uniformément vers f si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0.

3.2 Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 3.6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(x, y) := \|y - x\|$ est une distance sur E .

Remarque 3.7. Sauf mention explicite du contraire, la topologie considérée sur un espace vectoriel normé sera toujours celle induite par la distance de l'énoncé précédent.

Proposition 3.8. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . Alors $(F, \|\cdot\|_F)$ est un sous-espace topologique de $(E, \|\cdot\|)$.

Nous présentons ci-dessous quelques résultats propres aux topologies induites par une norme.

Proposition 3.9. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $A \subset E$. Alors A est bornée⁷ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq C$.

Proposition 3.10. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r > 0$. Alors $\overline{B(x, r)} = B_f(x, r)$.

Démonstration. Puisque $B(x, r) \subset B_f(x, r)$ et que $B_f(x, r)$ est un fermé, on a $\overline{B(x, r)} \subset B_f(x, r)$.

Réciproquement, soit $v \in B_f(x, r)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n := x + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)(v - x)$ alors $v_n \in B(x, r)$ puisque $\|v_n - x\| = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\|v - x\| \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)r < r$. De plus $\|v - v_n\| = \frac{1}{n+1}\|v - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $v \in \overline{B(x, r)}$. ■

Proposition 3.11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors toute suite de Cauchy $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$.

Démonstration. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, si $p, q \geq N$ alors $\|x_p - x_q\| \leq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ alors $\|x_n\| - \|x_N\| \leq \|\|x_n\| - \|x_N\|\| \leq \|x_n - x_N\| \leq 1$ d'où $\|x_n\| \leq 1 + \|x_N\|$. Posons $M := \max\{\|x_0\|, \dots, \|x_N\|, 1 + \|x_N\|\} \geq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$. ■

Corollaire 3.12. Une suite de convergente d'un espace vectoriel normé est bornée.

Corollaire 3.13. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact non vide.

Alors $\min_{x \in K} \|x\|$ et $\max_{x \in K} \|x\|$ sont bien définis.

Démonstration. Montrons que $\max_{x \in K} \|x\|$ est bien défini, la démonstration est similaire pour le minimum.

Puisque K est compacte et non vide, $\{\|x\| : x \in K\}$ est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$.

Ainsi $M := \sup_{x \in K} \|x\|$ est bien défini. Il reste à montrer que M est atteint.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par définition de la borne supérieure, il existe $x_n \in K$ tel que $M - \frac{1}{n} < \|x_n\| \leq M$.

Puisque K est compacte, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $\ell \in K$. Puisque $M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} < \|x_n\| \leq M$, en passant à la limite il vient $\|\ell\| = M$.

Il existe donc bien $\ell \in K$ tel que $\|\ell\| = \sup_{x \in K} \|x\|$. ■

3.3 Applications linéaires continues

Proposition 3.14. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) f est continue;
- (ii) f est continue en 0;
- (iii) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration.

- L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est vraie car une application continue est continue en chaque point de son domaine par définition.
- Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii).
Supposons que f soit continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|x\|_E \leq \eta \implies \|f(x)\|_F \leq 1.$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\|f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \leq 1$ d'où $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Et $\|f(0)\|_F = 0 \leq \frac{1}{\eta}\|0\|_E$.

Donc $M := \frac{1}{\eta}$ convient.

⁷Pour la distance induite par la norme, voir Définition 2.19.

- Montrons que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\eta := \frac{\varepsilon}{M+1}$ alors $\eta > 0$.

Soit $y \in E$ tel que $\|x - y\|_E \leq \eta$ alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq M\|x - y\|_E \leq \varepsilon \frac{M}{M+1} \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, \|x - y\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon,$$

i.e. que f est continue. ■

Corollaire 3.15. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

Pour $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on pose $\|L\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F$.

Alors

$$(1) \quad \forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \|L\| < \infty,$$

$$(2) \quad \text{Si } E \neq \{0\} \text{ alors } \forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{0 < \|x\|_E \leq 1} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F,$$

$$(3) \quad \|\cdot\| \text{ est une norme sur } \mathcal{L}_c(E, F), \text{ appelée norme d'opérateur ou norme subordonnée,}$$

$$(4) \quad \forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq \|L\| \|x\|_E,$$

$$(5) \quad \text{Si } (G, \|\cdot\|_G) \text{ est un espace vectoriel normé, alors } \forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall K \in \mathcal{L}_c(F, G), \|K \circ L\| \leq \|K\| \|L\|.$$

3.4 Comparaison de normes

Définition 3.16. Soit E un espace vectoriel. Soient N et N' deux normes sur E .

On dit que N et N' sont équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Proposition 3.17. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

Exemple 3.18.

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty.$$

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty.$$

$$(3) \quad \text{En particulier, les normes } \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont équivalentes sur } \mathbb{R}^d.$$

Proposition 3.19. Soit E un espace vectoriel. Deux normes N et N' sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie⁸ sur E .

Démonstration.

- Supposons que N et N' soient deux normes équivalentes sur E . Montrons qu'un ouvert pour N' est un ouvert pour N (par symétrie, on a aussi qu'un ouvert pour N est un ouvert pour N').

Soit O un ouvert pour N' . Soit $x \in O$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{N'}(x, \varepsilon) \subset O$.

Il existe $\beta > 0$ tel que $\forall x \in E, N'(x) \leq \beta N(x)$.

Soit $y \in B_N\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right)$ alors $N'(x - y) \leq \beta N(x - y) < \varepsilon$. Donc $B_N\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subset B_{N'}(x, \varepsilon) \subset O$.

Ainsi O est un ouvert pour N .

- Supposons que N et N' soient deux normes sur E définissant la même topologie.

La boule unité $B_N(0, 1)$ est un ouvert pour N et donc pour N' .

Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{N'}(0, \varepsilon) \subset B_N(0, 1)$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $\frac{\varepsilon}{2N'(x)}x \in B_{N'}(0, \varepsilon) \subset B_N(0, 1)$. Ainsi $N\left(\frac{\varepsilon}{2N'(x)}x\right) < 1$, i.e. $\frac{\varepsilon}{2}N(x) < N'(x)$.

On a donc montré que $\forall x \in E, \frac{\varepsilon}{2}N(x) \leq N'(x)$. L'autre inégalité s'obtient de façon similaire en intervertissant N et N' .

Donc N et N' sont équivalentes. ■

⁸i.e. une partie est ouverte pour N si et seulement si elle est ouverte pour N' . On pourra comparer avec l'exercice 2.2 pour le cas métrique.

3.5 Cas de la dimension finie

Proposition 3.20. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors les énoncés suivants sont équivalents

- (i) E est de dimension finie;
- (ii) Toutes les normes sur E sont équivalentes;
- (iii) Les compacts de E sont les parties fermées et bornées;
- (iv) La boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est un compact.

Lemme 3.21. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E .

On définit $\|\cdot\|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\left\| \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \right\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |\lambda_i|$, alors

- (i) $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ,
- (ii) Pour tout $a > 0$, $B_f(0, a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$,
- (iii) Les compacts de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

Démonstration. (i) C'est laissé en exercice.

- (ii) Soit $a > 0$. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $B_f(0, a)$. On note $x_n = \sum \lambda_n^i e_i$.

Alors $|\lambda_n^1| \leq \|x_n\|_\infty \leq a$. Ainsi $(\lambda_n^1)_n$ est une suite réelle bornée.

Donc il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\lambda_{\varphi_1(n)}^1)_n$ converge vers $\ell_1 \in [-a, a]$.

De même, il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\lambda_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^2)_n$ converge vers $\ell_2 \in [-a, a]$. Et ainsi de suite.

On pose $\varphi := \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_d$. Alors φ est strictement croissante et $(\lambda_{\varphi(n)}^i)_n$ converge vers ℓ_i .

On pose $\ell := (\ell_1, \dots, \ell_d)$ alors $\ell \in B_f(0, a)$ et $\|x_{\varphi(n)} - \ell\|_\infty \leq \sum_{i=1}^d |\lambda_{\varphi(n)}^i - \ell_i| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $B_f(0, a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

- (iii) On sait déjà qu'un compact est fermé et borné (voir Proposition 2.21). Il reste à vérifier qu'un fermé et borné est compact.

Soit K une partie fermée et bornée. Puisque K est bornée, il existe $a > 0$ tel que $K \subset B_f(0, a)$.

Donc K est un fermé inclus dans un compact et est donc compact. ■

Lemme 3.22 (Lemme de Riesz). Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé tel que $F \neq E$ et $\alpha \in]0, 1[$. Alors il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\forall x \in F, \|x - u\| > \alpha$.

Démonstration. Soit $v \in E \setminus F$. Notons $\delta := \inf\{\|v - x\| : x \in F\}$. On a $\delta > 0$ puisque F est un fermé⁹.

Puisque $\frac{\delta}{\alpha} > \delta$, il existe $x_0 \in F$ tel que $\delta \leq \|v - x_0\| < \frac{\delta}{\alpha}$. Posons $u := \frac{v - x_0}{\|v - x_0\|}$ alors $\|u\| = 1$.

Soit $x \in F$ alors

$$\|x - u\| = \frac{1}{\|v - x_0\|} \|\|v - x_0\|x + x_0 - v\| \geq \frac{\delta}{\|v - x_0\|} > \alpha.$$

Donc u convient. ■

Démonstration de la Proposition 3.20.

Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). On fixe $B = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E .

Montrons d'abord que $\text{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est continue.

Soit $x \in E$. Notons $x = \sum \lambda_i e_i$ alors

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d |\lambda_i| \|e_i\| \\ &\leq \max(\|e_1\|, \dots, \|e_d\|) \sum_{i=1}^d |\lambda_i| \\ &\leq d \max(\|e_1\|, \dots, \|e_d\|) \|x\|_\infty \end{aligned}$$

⁹Soient (X, d) un espace métrique, $F \subset X$ un fermé et $a \in X$ tels que $\inf\{d(x, a) : x \in F\} = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n+1}$. Ainsi $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de F fermé qui converge vers x , donc $x \in F$.

On a donc montré qu'il existe $M := d \max(\|e_1\|, \dots, \|e_d\|) \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|\text{id}(x)\| \leq M\|x\|_\infty$. Puisque $\text{id} : E \rightarrow E$ est linéaire, on déduit de la Proposition 3.14 que $\text{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est continue.

Montrons ensuite que $S := \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact de $(E, \|\cdot\|)$.

Tout d'abord S est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue : $S = (\|\cdot\|_\infty)^{-1}(\{1\})$.

De plus S est inclus dans $B_{f, \|\cdot\|_\infty}(0, 1)$ qui est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Donc S est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ comme fermé inclus dans un compact.

Enfin, S est un compact de $(E, \|\cdot\|)$ comme image d'un compact par $\text{id} : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ continue.

Donc $\alpha := \min_{x \in S} \|x\|$ et $\beta := \max_{x \in S} \|x\|$ existent. De plus, $\alpha, \beta > 0$ puisque $0 \notin S$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$ donc $\alpha \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \leq \beta$ et ainsi $\alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty$.

On a bien montré qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E, \alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty$, i.e. que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Donc toutes les normes de E sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$.

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que toutes les normes sur E sont équivalentes.

Soit K une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|)$. Alors, puisque les normes sont équivalentes, on vérifie que K est un fermé borné de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Ainsi K est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et donc de $(E, \|\cdot\|)$ puisque les normes définissent la même topologie.

Réciproquement, les parties compactes sont fermées et bornées d'après la Proposition 2.21.

Montrons (iii) $\Rightarrow$ (iv). C'est clair puisque la boule unité fermée est fermée et bornée

Montrons (iv) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $B_f(0, 1)$ soit compact. Supposons par l'absurde que E soit de dimension infinie. Par compacité, il existe $x_1, \dots, x_n \in B_f(0, 1)$ tels que $B_f(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{1}{4}\right)$. Posons $F := \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Alors F est un fermé¹⁰. Comme E est de dimension infini, on a de plus que $F \subsetneq E$. On déduit donc du lemme de Riesz qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\forall x \in F, \|x - u\| > \frac{1}{2}$. Puisque $u \in B_f(0, 1)$, il existe $i = 1, \dots, n$ tel que $u \in B\left(x_i, \frac{1}{4}\right)$ et ainsi $\frac{1}{2} < \|u - x_i\| < \frac{1}{4}$. D'où une contradiction. Ainsi E est de dimension finie. ■

Corollaire 3.23. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire $E \rightarrow F$ est continue, i.e. $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. On fixe $B = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E .

Puisque E est de dimension finie, $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et il existe donc $\beta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_\infty \leq \beta\|x\|_E$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soit $x \in E$.

Posons $M := \max(\|f(e_1)\|_F, \dots, \|f(e_d)\|_F)$ et notons $x = \sum \lambda_i e_i$ alors

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum \lambda_i e_i\right) \right\|_F = \left\| \sum \lambda_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum |\lambda_i| \|f(e_i)\|_F \leq M \sum |\lambda_i| \leq M\|x\|_\infty \leq M\beta\|x\|_E.$$

Donc f est continue d'après la Proposition 3.14. ■

Proposition 3.24. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(x_n)_n \in E^\mathbb{N}$ une suite de Cauchy. D'après la proposition 3.11, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B_f(0, M)$. Puisque $B_f(0, M)$ est fermé et borné, c'est un compact. Donc $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans $B_f(0, M)$. On déduit de la proposition 2.30 que $(x_n)_n$ converge. ■

¹⁰On utilise aussi qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé, voir le corollaire 3.25. La démonstration du corollaire repose sur le fait que les fermés bornés d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont compacts, ce que l'on a démontré puisque (i) $\Rightarrow$ (iii).

Corollaire 3.25. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors F est un fermé de E .

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $\ell \in E$. Alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et, puisque F est complet, converge dans F . Puisqu'un espace vectoriel normé est séparé, on a bien $\ell \in F$. Ainsi F est un fermé de E . ■

Remarque 3.26. *TODO* En utilisant que tout espace vectoriel admet une base (et donc l'axiome du choix), on peut montrer que les réciproques des deux corollaires précédents sont vraies : un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie si et seulement si toute application linéaire $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est continue si et seulement si tout sous-espace vectoriel est fermé.

Une conséquence du lemme de Baire et du corollaire précédent est qu'aucun espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable n'est complet.

Proposition 3.27. Un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable n'est pas complet.

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $B = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de E . Supposons par l'absurde que E soit complet.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n := \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est fermé (car sous-espace vectoriel de dimension finie) et que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, on déduit du corollaire 2.39 qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n soit d'intérieur vide.

Il existe donc $x \in F_n$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset F_n$. Soit $y \in E \setminus \{x\}$. Posons $z := x + \frac{r}{2} \frac{x-y}{\|x-y\|}$ alors $z \in B(x, r)$. Donc $y = \frac{2}{r}\|x-y\|x - \frac{2}{r}\|x-y\|z + x \in \text{Vect}(B(x, r)) \subset F_n$.

Ainsi $F_n = E$, d'où une contradiction. ■

Exercices

Exercice 3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels.

Soient $\|\cdot\|_F$ une norme sur F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F .

On définit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N(x) := \|f(x)\|_F$.

Montrer que N est une norme sur E si et seulement si f est injective.

Exercice 3.2. Soient E un espace vectoriel et $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- (i) $\forall x \in E \setminus \{0\}, N(x) > 0$
- (ii) $N(0) = 0$
- (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, N(x + \lambda y) \leq N(x) + |\lambda|N(y)$

Montrer que N est une norme sur E .

Exercice 3.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- (1) Montrer que $\forall x, y \in E, \|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$.
- (2) En déduire que $\forall x, y \in E, \|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.
- (3) La constante 2 peut-elle être améliorée?

Exercice 3.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

- (1) Montrer que si $B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$ alors $\|a - b\| \leq s - r$.
- (2) Montrer que si $B_f(a, r) \cap B_f(b, s) = \emptyset$ alors $\|a - b\| > r + s$.

Exercice 3.5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et V un sous-espace vectoriel de E .

- (1) Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) On suppose maintenant que $\overline{V} \neq \emptyset$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset V$.
 - (b) En déduire que $V = E$.

Exercice 3.6. Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p > 1$. On définit $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\|(x_1, \dots, x_d)\|_p := \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

- (1) On pose $q := \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall a, b \geq 0, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

- (2) Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \sum_{k=1}^d |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^d |y_k|^q \right)^{1/q}$$

On pourra commencer par appliquer la question précédente à $a := \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b := \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$.

Le cas $p = q = 2$ est appelé inégalité de Cauchy-Schwarz.

- (3) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.
- (4) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 3.7. Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

On définit $\|\cdot\|_p : C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

- (1) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
On pourra adapter les solutions de l'Exercice 3.6 en remplaçant $\sum$ par $\int$.
- (2) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 3.8. Dessiner la boule fermée unité, i.e. centrée en 0 de rayon 1, pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3.9. Montrer que les couples $(E, \|\cdot\|)$ suivants sont des espaces vectoriels normés :

- (1) $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|\cdot\|_m : \sum a_i X^i \mapsto \sum |a_i| m^i$ où $m \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (2) $E = \mathbb{R}\{x\}_\rho$ l'espace vectoriel des séries entières réelles de rayon de convergence $\geq \rho$ et

$$\|\cdot\|_m : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 0} |a_i| m^i$$

où $m, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ et $m < \rho$.

- (3) $E = \text{Lip}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$, où $a < b$, et

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

- (4) $E = \ell^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ où $p \in [1, \infty[$.

- (5) $E = \ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \text{ bornée}\}$ et $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

- (6) $E = \mathcal{B}(X, F)$ l'espace vectoriel des applications $X \rightarrow F$ bornées et $\|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F$ où X est

un ensemble non vide et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 3.10. TODO : Parler d'espace topologique quotient avant Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E . Montrer que l'espace vectoriel E/F muni de l'application

$$\begin{aligned} E/F &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|\cdot\|_{E/F} : \bar{x} &\mapsto \inf_{u \in \bar{x}} \|u\| \end{aligned}$$

est un espace vectoriel normé.

Exercice 3.11. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_E : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue.

Exercice 3.12. On considère $E := \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées muni de la norme $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

On définit l'opérateur de Cesàro $T : E \rightarrow E$ par $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i$.

- (1) Montrer que T est bien défini.
- (2) Montrer que T est une application linéaire continue et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 3.13. Les questions suivantes sont indépendantes.

- (1) On définit $\|\cdot\|_\infty : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|(a_{ij})\|_\infty := \max(|a_{ij}|)$.
 - (a) Vérifier rapidement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Montrer que $\forall M, N \in M_n(\mathbb{R}), \|MN\|_\infty \leq n\|M\|_\infty\|N\|_\infty$.
 - (c) En déduire que si $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ alors il existe $C > 0$ tel que $\forall M, N \in M_n(\mathbb{R}) \|MN\| \leq C\|M\|\|N\|$.
- (2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $M_n(\mathbb{R})$ est un fermé.
- (3) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.
- (4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B . Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 3.14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

- (1) Montrer que $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$.
- (2) Montrer que $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty$.
- (3) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
Indice : pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (x-a)^n$.

Exercice 3.15. Soit $E := \mathbb{R}[X]$.

(1) On définit $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N_1 \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) := \sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{2^k}$.

Montrer que N_1 est une norme sur E .

(2) Montrer que $X^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour la norme N_1 .

(3) On définit $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N_2 \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) := \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| + \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{2^k}$.

Montrer que N_2 est une norme sur E .

(4) Montrer que $X^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ pour la norme N_2 .

(5) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes?

Exercice 3.16. On considère $A := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) : f(1) > 0\}$.

(1) Montrer que A est un ouvert de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Indication : pour $f \in A$, on pourra considérer $B(f, f(1))$.

(2) Montrer que A n'est pas un ouvert de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Indication : pour $f \in A$, on pourra considérer $g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $g(x) = f(x) - f(1)x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ bien choisi.

(3) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes?

Exercice 3.17. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $K \subset E$ un compact. Montrer qu'il existe un ouvert U tel que $K \subset U$ et $\overline{U}$ est un compact.

Exercice 3.18. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et V un sous-espace vectoriel de E .

(1) Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E .

(2) On suppose maintenant que $\overline{V} \neq \emptyset$.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset V$.

(b) En déduire que $V = E$.

Exercice 3.19. Soient E et F deux espaces vectoriels.

Soient $\|\cdot\|_F$ une norme sur F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F .

On définit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N(x) := \|f(x)\|_F$.

Montrer que N est une norme sur E si et seulement si f est injective.

Exercice 3.20. On rappelle qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* si tout segment joignant deux éléments de A est entièrement inclus dans A , autrement dit si

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

- (1) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Montrer que la boule unité fermée $B_f(0, 1) := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est une partie convexe de E .

- (2) L'objectif de cette question est de montrer que, dans la définition d'une norme, on peut remplacer l'inégalité triangulaire par la propriété que la boule unité fermée est convexe.

Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$;
- $B_f(0, 1) := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est une partie convexe de E .

- (a) Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $v := \frac{1}{\|x\| + \|y\|}(x + y) \in B_f(0, 1)$.

- (b) En déduire que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

- (3) L'objectif de cette question est de montrer que toute partie convexe, bornée, d'intérieur non vide dont l'intérieur contient 0 est la boule unité d'une norme.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ une partie convexe, bornée et d'intérieur non vide telle que $0 \in \overset{\circ}{K}$.

On définit $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $p(x) := \inf \{t > 0 : tx \in K\}$ (p s'appelle la jauge de K).

- (a) Montrer que p est bien définie.

Indice : on pourra utiliser que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$.

- (b) Étant donné $x \in E$, donner une interprétation géométrique du nombre $p(x)$.

- (c) Montrer que $K = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$.

- (d) i. Montrer que $p^{-1}(0) = \bigcap_{t>0} tK$.

- ii. En déduire que $\forall x \in E, p(x) = 0 \implies x = 0$.

Indice : on pourra utiliser que K est bornée.

- (e) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

- (f) En déduire que p est une norme sur E .

- (4) L'objectif de cette question est de montrer que toute partie convexe, bornée, d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ une partie convexe, bornée et d'intérieur non vide telle que $0 \in \overset{\circ}{K}$.

On définit $f : K \rightarrow B_f(0, 1)$ par $f(x) = p(x) \frac{x}{\|x\|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- (a) Montrer que f est bien définie.

- (b) Montrer que f est un homéomorphisme.

Indice : on pourra commencer par déterminer la réciproque de f .

4 Espaces de Banach

4.1 Définition et une caractérisation via les séries absolument convergentes

Définition 4.1. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

Nous avons déjà vu qu'un espace vectoriel normé de dimension finie était un espace de Banach et qu'il n'existe aucun espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable.

Proposition 4.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

De plus, si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est absolument convergente alors $\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.

Démonstration. Supposons que E soit complet. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ une série absolument convergente de E . Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p := \sum_{n=0}^p x_n$ la p -ème somme partielle.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série est absolument convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ si $p \geq N$ alors $\sum_{n=p+1}^{\infty} \|x_n\| \leq \varepsilon$.

Soient $p, q \geq N$ avec $q > p \geq N$ alors $\|S_q - S_p\| \leq \sum_{n=p+1}^q \|x_n\| \leq \varepsilon$. Donc $(S_p)_p$ est une suite de Cauchy dans E complet et la série converge.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente est convergente.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $k \in \mathbb{N}$ alors il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ si $p, q \geq N_k$ alors $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}$. Définissons $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $\varphi(0) := N_0$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k+1) := \max(\varphi(k) + 1, N_{k+1})$, alors φ est strictement croissante.

Posons $y_0 := x_{\varphi(0)}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $y_{k+1} := x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} \|y_k\| \leq \|x_{\varphi(0)}\| + 1$ et ainsi la série $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ est absolument convergente et donc convergente.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} = \sum_{k=0}^n y_k$, on en déduit que $(x_{\varphi(n)})_n$ est convergente. Ainsi $(x_n)_n$ est convergente puisqu'il s'agit d'une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente. ■

4.2 Les théorème de Banach–Schauder et quelques conséquences

Théorème 4.3 (Théorème de Banach–Schauder). Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire, continue et surjective entre deux espaces de Banach. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset f(B(0, 1))$.

Démonstration.

Lemme. Il existe $r > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) \subset \overline{f\left(B\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $F_n := \overline{f(B(0, n+1))}$. Comme f est surjective, on a $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Puisque F est complet, on déduit du corollaire 2.39 qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que F_N soit d'intérieur non vide. Alors il existe $v \in F_N$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(v, \varepsilon) \subset F_N$.

Remarquons¹¹ que $-v \in F_N$ de sorte que $B(0, \varepsilon) = B(v, \varepsilon) - v \subset F_N + F_N = F_{2N}$.

Ainsi, $r := \frac{\varepsilon}{4N+4}$ convient. □

Soit $y \in B(0, r)$. On va construire par récurrence une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \|y - f(x_0 + \dots + x_n)\| < \frac{r}{2^{n+2}}.$$

Puisque $y \in B(0, r) \subset \overline{f\left(B\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$, il existe $x_0 \in B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tel que $\|y - f(x_0)\| < \frac{r}{4}$.

Supposons $x_0, \dots, x_n$ déjà construits. Puisque $y - f(x_0 + \dots + x_n) \in B\left(0, \frac{r}{2^{n+1}}\right) \subset \overline{f\left(B\left(0, \frac{1}{2^{n+2}}\right)\right)}$ il existe $x_{n+1} \in B\left(0, \frac{1}{2^{n+2}}\right)$ tel que $\|y - f(x_0 + \dots + x_n) - f(x_{n+1})\| < \frac{r}{2^{n+3}}$.

¹¹Utiliser que l'image est un sous-espace vectoriel et que tout point adhérent d'une partie est limite d'éléments de cette partie.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est absolument convergente dans E complet, donc elle est convergente et de plus $\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|y - f(x_0 + \dots + x_n)\| < \frac{r}{2^{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que f est continue, on a $f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n) = y$. Donc $y \in f(B(0, 1))$ et $B(0, r) \subset f(B(0, 1))$. ■

Théorème 4.4 (Théorème de l'application ouverte). *Une application linéaire, continue et surjective entre deux espaces de Banach est ouverte, i.e. l'image d'un ouvert est un ouvert.*

Théorème 4.5 (Théorème d'isomorphisme de Banach). *Une application linéaire, continue et bijective entre deux espaces de Banach est un isomorphisme bicontinu, i.e. c'est un isomorphisme linéaire et un homéomorphisme.*

Théorème 4.6 (Théorème du graphe fermé). *Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire entre deux espaces de Banach. Alors f est continue si et seulement si son graphe est un fermé de $E \times F$.*

Remarque 4.7. Tous les énoncés ci-dessus sont équivalents : on a Banach–Schauder $\Rightarrow$ application ouverte $\Rightarrow$ isomorphisme de Banach $\Leftrightarrow$ graphe fermé et isomorphisme de Banach $\Rightarrow$ Banach–Schauder.

Exercices

TODO : Ajouter des exercices sur Banach–Schauder+ouverte+graphe fermé+iso

Exercice 4.1. TODO : revoir cet exo Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|'$.

Exercice 4.2. Montrer que les couples $(E, \|\cdot\|)$ suivants sont des espaces de Banach :

- (1) $E = \mathbb{R}\{x\}_\rho$ l'espace vectoriel des séries entières réelles de rayon de convergence $\geq \rho$ et

$$\|\cdot\|_m : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 0} |a_i| m^i$$

où $m, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ et $m < \rho$.

- (2) $E = \text{Lip}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$, où $a < b$, et

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

- (3) $E = \ell^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ où $p \in [1, \infty[$.

- (4) $E = \ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$ et $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

- (5) $E = \mathcal{B}(X, F)$ l'espace vectoriel des applications $X \rightarrow F$ bornées et $\|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F$ où X est

un ensemble non vide et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach.

Exercice 4.3. (1) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$, équipé de la norme d'opérateur, est un espace de Banach.

- (2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On munit $\mathcal{L}_c(E)$ de sa norme d'opérateur. Soit $u \in \mathcal{L}_n(E)$ tel que $\|u\| \leq 1$.

(a) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$ est une série convergente dans E .

(b) En déduire que $\text{id} - u$ est inversible.

Exercice 4.4. (1) En considérant la famille de polynômes $\left(P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{p^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $p > 0$ fixé, montrer

que l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_m)$ (c.f. 3.9.(1)) n'est pas complet pour $m < p$.

On pourra commencer par montrer que si une suite de polynômes converge vers un polynôme alors les suites de coefficients convergent.

- (2) Donner une autre démonstration qui tient en trois mots.

Exercice 4.5. Considérons l'espace vectoriel normé $(C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [-1, 1], f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

- (1) Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

- (2) Supposons que cette suite converge vers une fonction $f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)| dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - f(t)| dt = 0.$$

(b) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1| dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - 1| dt = 0.$$

(c) En déduire que, pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t) = 1$ et pour $t \in [-1, 0[$, $f(t) = -1$.

(3) Conclure.

Exercice 4.6. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

- (i) $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0, 1] \setminus \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$
- (ii) f_n est affine par morceaux sur les intervalles $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right]$ et $\left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right]$
- (iii) $f_n\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = n$

- (1) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est absolument convergente et divergente pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- (2) Que peut-on en déduire sur $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$?

Exercice 4.7. L'objectif de cet exercice est de donner une nouvelle démonstration du fait qu'un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable n'est jamais complet.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable. On fixe $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une base de E . On note $F_0 = \{0\}$ et, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $F_n := \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

On considère la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ définie par $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_{n+1} := \frac{1}{3} \inf_{x \in F_{n-1}} \left\| \frac{\lambda_n}{\|e_n\|} e_n - x \right\|$.

- (1) Justifier que $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.
- (2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_n > 0$.
- (3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{3}$.
- (4) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_n \leq 3^{-n}$.
- (5) On suppose par l'absurde que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

(a) Montrer qu'il existe $\ell \in E$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\|e_n\|} e_n = \ell$.

(b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\|e_n\|} e_n \in F_N$.

(c) Montrer que $3\lambda_{N+2} \leq \frac{3}{2}\lambda_{N+2}$.

(6) Conclure.

Exercice 4.8. On considère $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x-y)u(y)dy = \varphi(x).$$

Exercice 4.9. TODO : Ajouter question avec démonstration utilisant séries géométriques On considère $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|T\| < 1$. On souhaite montrer que $\text{Id} - T$ est bijective d'inverse continue à l'aide du théorème du point fixe.

- (1) Soit $y \in E$. Montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $x - T(x) = y$. On notera $x(y) \in E$ cet unique élément.

Indice : Considérer l'application donnée par $f_y(x) = T(x) + y$.

- (2) Montrer que $E \ni y \mapsto x(y) \in E$ est linéaire continue.

Indice : Pour la continuité, on pourra considérer l'application $F : \mathcal{L}_c(E) \rightarrow \mathcal{L}_c(E)$ donnée par $F(u) = \text{Id}_E + T \circ u$.

Exercice 4.10. Montrer qu'il existe une unique solution au système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} (2 \sin(x_1) + \cos(x_2)) \\ x_2 = \frac{1}{5} (\cos(x_1) + 3 \sin(x_2)) \end{cases}$$

avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 4.11. (1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le système suivant d'inconnue $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$x_1 = \frac{1}{2} \sin(x_1 + x_2) + t, \quad x_2 = \frac{1}{2} \cos(x_1 - x_2) - t + 1$$

possède une unique solution. On la note $(x_1(t), x_2(t))$.

(2) Montrer que $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sont continues.

Exercice 4.12. TODO : revoir cet exercice On considère un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$. On fixe un ouvert non vide U et $x_0 \in U$. On suppose que $r > 0$ est tel que $B_f(x_0, r) \subset U$. On se donne $t_1, k > 0$ et une application continue $f : (-t_1, t_1) \times U \rightarrow E$ telle que, pour tout $t \in (-t_1, t_1)$ et tout $x, \tilde{x} \in B_f(x_0, r)$,

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq k\|x - \tilde{x}\|.$$

On fixe $0 < T < t_0 < t_1$ et on pose

$$X = \mathcal{C}^0([-T, T], B_f(x_0, r)) \subset \mathcal{C}_b^0([-T, T], E)$$

qu'on munit de la distance uniforme.

On définit, pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in [-T, T]$,

$$A(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

(1) Montrer que X est une partie fermée de $\mathcal{C}_b^0([-T, T], E)$.

(2) Justifier que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est une fonction continue sur $[-T, T]$.

(3) Établir qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ et tout $s \in [-t_0, t_0]$,

$$\|f(s, x(s))\| \leq M.$$

(4) Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que $A : X \rightarrow X$ et tel que A est contractante.

(5) Conclure.

(6) Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 4.13. Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $F_n \in E$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Montrer que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F \in E$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(2) Montrer que E est complet.

(3) On considère l'application $T : E \rightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, T(f) : x \in [0, 1] \mapsto 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt \in \mathbb{R}$$

(a) Montrer que T^2 est une contraction.

Indice : on pourra commencer par montrer que $\forall t \in [0, 1], t - t^2 \leq \frac{1}{4}$.

(b) En déduire que T a un unique point fixe puis qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - t^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.14. On considère l'espace vectoriel $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

(1) On cherche à montrer qu'il existe une unique fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{14} \int_0^x s^2 \sin(f(s)) ds.$$

(a) Pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$T(f) : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{14} \int_0^x s^2 \sin(f(s)) ds \end{array}.$$

Montrer que cela définit bien une application $T : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

(b) Montrer que T est contractante.

(c) Conclure.

5 Applications continues

TODO : $C(X, Y)$ où (X, d) compact et (Y, d) complet + Stone Weierstrass lorsque $Y = \mathbb{R}$ + Ascoli. Garder injection compact pour la partie sur les opérateurs.

6 Le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

7 Topologies faibles

8 Un peu de théorie spectrale

9 Espaces de Sobolev

10 Notions sur les distributions