

Intégrale de Lebesgue

Feuille de TD n°3

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles étagées ?

1. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
2. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $([0, 10], \mathcal{B}([0, 10]))$;
3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
4. $x \mapsto \sin x$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
5. $x \mapsto \lfloor \sin x \rfloor$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 2. On munit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure $\mu := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k-1} \delta_k$.

Calculer $\mu(\mathbb{N})$, $\int \mathbb{1}_{2\mathbb{N}} d\mu$ et $\int \min(n, 3) d\mu(n)$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit $g_n : ([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $g_n(x) := \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

1. Montrer que g_n est étagée positive.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\lambda$.
3. Montrer que $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $[0, 1[\ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que la suite extraite $(g_{2^m})_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante et en déduire la valeur de $\int_{[0, 1[} x d\lambda(x)$.

Exercice 4. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $(E, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ mesurables qui converge simplement vers $f : E \rightarrow [0, +\infty]$.

Montrer que s'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int f_n d\mu \leq M$ alors $\int f d\mu \leq M$.

Exercice 5. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions $(E, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ mesurables. On note $f = \lim_n f_n : E \rightarrow [0, +\infty]$.

1. Montrer que si $\int f_0 d\mu < +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.
On pourra proposer deux démonstrations : une utilisant le théorème de convergence monotone et une utilisant le théorème de convergence dominée.
2. Le résultat est-il encore vrai sans hypothèse d'intégrabilité sur f_0 ?

Exercice 6.

1. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ une fonction mesurable.
 - (a) Montrer que $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \min(f, n) d\mu$.
 - (b) On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\int f d\mu = \sum_{k \geq 1} \mu(\{f \geq k\})$.
2. Calculer $\int_{\mathbb{N}} k d\nu(k)$ où $\nu := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j-1} \delta_j$ (voir Exercice 2).
3. Calculer $\int_{[0, 1]} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor d\lambda(x)$.

Exercice 7. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ une fonction intégrable. On souhaite montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leq \eta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que f soit bornée sur A et $\int_{A^c} |f| d\mu < \varepsilon$.
2. Conclure.

Exercice 8. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Montrer que $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, $\left| \int f d\mu \right| = \int |f| d\mu \Leftrightarrow (f \geq 0 \text{ p.p. ou } f \leq 0 \text{ p.p.})$.
2. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{A}, \mu)$.
 - (a) Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que $\int_A f d\mu := \int f \mathbb{1}_A d\mu$ est bien définie.
 - (b) Montrer que si $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ alors $f \leq g$ p.p.
 - (c) En déduire que si $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ alors $f = g$ p.p.
3. On considère $(\{0\}, \mathcal{P}(\{0\}), \mu)$ où μ est définie par $\mu(\{0\}) := +\infty$. Soient $f \equiv 2$ et $g \equiv 1$.
Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(\{0\})$, $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ mais que $f \leq g$ p.p. est faux.
Quelle hypothèse de la question précédente n'est pas vérifiée?

Exercice 9. Pour chaque intervalle I des questions suivantes, on considère l'espace mesuré $(I, \mathcal{L}(I), \lambda)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $]0, 1[\ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.
2. Montrer que $]1, +\infty[\ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si $\alpha < -1$.
3. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]0, +\infty[\ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ soit intégrable?
4. Montrer que $]0, 1[\ni x \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$ est intégrable et calculer $\int_{]0, 1[} \ln x d\lambda(x)$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $]0, +\infty[\ni x \mapsto \frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si $0 < a < 1$.

Exercice 10 (Autour de l'intégrale de Dirichlet). On définit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) := \frac{\sin x}{x}$, et on considère l'espace mesuré $(]0, +\infty[, \mathcal{L}(]0, +\infty[), \lambda)$.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$.
3. En déduire que f n'est pas intégrable (au sens de Lebesgue) sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f \mathbb{1}_{]0, n]}$ est intégrable et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f \mathbb{1}_{]0, n]} d\lambda$ existe.
Y a-t-il une contradiction avec la question précédente?

Exercice 11. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0, +\infty[} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} d\lambda(x)$.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, 1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n} d\lambda(x)$.

Exercice 12.

1. Montrer que $\int_{]0, 1[} \frac{-\ln x}{1-x} d\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Montrer que $\int_{]0, 1[} x^{-x} d\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$ (*sophomore's dream*).
3. Montrer que $\int_{]0, +\infty[} \frac{\sin x}{e^x - 1} d\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 13. Pour $t \in [0, +\infty[$, on pose $F(t) := \int_{[0, +\infty[} t e^{-tx} d\lambda(x)$.

1. Montrer que F est bien définie et expliciter ses valeurs sans signe intégral.
2. La fonction F est-elle continue en 0?
3. Quelle hypothèse du théorème de continuité sous le signe intégral n'est pas vérifiée?

Exercice 14 (Intégrale de Gauss). On définit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $G : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_{[0,1]} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} d\lambda(t) \quad \text{et} \quad G(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

1. Montrer que F est bien définie, de classe C^1 , et que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2x \int_{[0,1]} e^{-x^2(1+t^2)} d\lambda(t)$.
2. Montrer que G est de classe C^1 .
3. (a) Montrer que $\forall x \geq 0, F'(x) + G'(x) = 0$.
Indication : on pourra effectuer le changement de variable $t = xu$.
 (b) En déduire que $\forall x \geq 0, F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$.
4. (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
 (b) En déduire que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) = \sqrt{\pi}$.
5. (a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$.
 (b) En déduire que la mesure gaussienne centrée réduite, de densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ par rapport à λ , est une mesure de probabilité (i.e. la mesure de $\mathbb{R}$ vaut 1).

Exercice 15.

1. Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto xe^{-x^2}$ sont intégrables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. Montrer que $F(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(tx) d\lambda(x)$ définit bien une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , et exprimer F' sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = -\frac{t}{2} F(t)$.
4. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = F(0) e^{-\frac{t^2}{4}}$.¹

Problème (Hors TD – Étude de la fonction Γ et quelques applications).

On définit $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\Gamma(s) := \int_{]0, +\infty[} t^{s-1} e^{-t} d\lambda(t)$.

1. Montrer que Γ est bien définie.
2. On définit $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} n^{-s}$.
 Montrer que $\forall s > 1, \int_{]0, +\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} d\lambda(t) = \Gamma(s) \zeta(s)$.
3. On fixe $s > 0$. Pour $n \geq 1$, on définit $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(t) := \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \mathbb{1}_{]0, n[}(t)$.
 (a) Montrer que $(f_n)_n$ est croissante et converge simplement vers $]0, +\infty[\ni t \mapsto e^{-t} t^{s-1} \in \mathbb{R}$.
 (b) En déduire la *formule d'Euler* $\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}$.
4. (a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction intégrable $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall s > 0, t^{s-1} e^{-t} \leq g(t) \text{ p.p.}$$

 (b) Soient $0 < a < b$. Montrer que $\forall s \in [a, b], \forall t > 0, t^{s-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$.
 (c) En déduire que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

¹On peut montrer que $F(0) = \sqrt{\pi}$ (voir l'Exercice 14).

5. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a > 0$. Montrer que $t \mapsto |\ln t|^k t^{a-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 (b) En déduire que Γ est de classe C^∞ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s > 0, \Gamma^{(k)}(s) = \int_{]0, +\infty[} (\ln t)^k t^{s-1} e^{-t} d\lambda(t).$$

- (c) Montrer que Γ est convexe.
 6. (a) Montrer que $\forall s > 0, \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.
 (b) En déduire que $\Gamma(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{s}$.
 (c) Montrer qu'il existe $s_0 \in]1, 2[$ tel que Γ soit strictement décroissante sur $]0, s_0]$ et strictement croissante sur $[s_0, +\infty[$.
 (d) Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Gamma(s)$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(s)}{s}$, puis tracer l'allure du graphe de Γ .

7. Log-convexité.

- (a) Soit $c > 0$. Montrer que $s \mapsto c^s \Gamma(s)$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
On pourra commencer par étudier, pour $t > 0$ fixé, la convexité de $s \mapsto c^s t^{s-1} e^{-t}$.
 (b) En déduire que $\forall x, y > 0, \forall \theta \in [0, 1], \Gamma(\theta x + (1-\theta)y) \leq \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta}$.
Pour $x \neq y$, on pourra choisir $c > 0$ tel que $c^x \Gamma(x) = c^y \Gamma(y)$.
 (c) (Inégalité de Gautschi) Montrer que $\forall x > 0, \forall \sigma \in [0, 1], x^{1-\sigma} \leq \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\sigma)} \leq (x+1)^{1-\sigma}$. Indication : on pourra utiliser la question précédente deux fois.
 (d) En déduire que $\forall \sigma \in [0, 1], \Gamma(x+\sigma) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\sigma \Gamma(x)$.

8. Valeurs aux demi-entiers.

- (a) Montrer que $\forall s > 0, \Gamma(s) = 2 \int_{]0, +\infty[} u^{2s-1} e^{-u^2} d\lambda(u)$.
 (b) On admet que² $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) = \sqrt{\pi}$. Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

- (c) À l'aide de la formule d'Euler, en déduire que $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

9. Formule de Stirling. Pour $x > 0$, on définit $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_x(u) := \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}u}$ si $u > -\sqrt{x}$ et $f_x(u) := 0$ sinon.

- (a) Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda$.
 (b) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_x(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.
 (c) Pour $v > -1$, on pose $h(v) := v - \ln(1+v)$, de sorte que $f_x(u) = e^{-xh\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}$ pour $u > -\sqrt{x}$. Montrer que

$$\forall v \in]-1, 0], h(v) \geq \frac{v^2}{2}, \quad \forall v \in [0, 1], h(v) \geq \frac{v^2}{8} \quad \text{et} \quad \forall v \geq 1, h(v) \geq (1 - \ln 2)v.$$

- (d) En déduire que $\forall x \geq 1, \forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq f_x(u) \leq e^{-\frac{u^2}{8}} + e^{-(1-\ln 2)|u|}$.
 (e) En déduire que $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$.
 (f) En déduire la formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

²Voir l'Exercice 14.