

Intégrale de Lebesgue

Feuille de TD n°2

Exercice 1. Déterminer les tribus $\mathcal{A} := \sigma(\{1, 2\}, \{3\})$ et $\mathcal{B} := \sigma(\{1\}, \{2\})$ sur $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2. On considère $F \subset E$ deux ensembles. On définit $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E) : A \subset F \text{ ou } A^c \subset F\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E .
2. Montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{P}(F))$.
3. Déterminer la tribu trace $\mathcal{A}_F$ de $\mathcal{A}$ sur F .
4. Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ si et seulement si $E \setminus F$ possède au plus un élément.

Exercice 3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur un ensemble E .

1. Montrer que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ou $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
2. Montrer que $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$.

Exercice 4. Soit E un ensemble. On définit $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ coïncide avec la tribu engendrée par les singletons de E .

Exercice 5.

1. Montrer qu'une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est un borélien.
2. Montrer que $C := \{v \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|v\| \leq 2\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $A := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, |x - n| < 2^{-n}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. On considère la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : F \text{ fermé}\})$.
2. Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de compacts et en déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : K \text{ compact}\})$.
3. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\})$.

Exercice 7. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Montrer les assertions suivantes :

1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur F alors la tribu $f^{-1}(\mathcal{B})$ image réciproque de $\mathcal{B}$ par f est la plus petite tribu sur E rendant f mesurable;
2. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E alors la tribu $f_*(\mathcal{A})$ image de $\mathcal{A}$ par f est la plus grande tribu sur F rendant f mesurable.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $(E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables :

1. $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ est majorée par } 1\}$;
2. $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ est bornée}\}$;
3. $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ converge vers } 0\}$;
4. $\{x \in E : (f_n(x))_n \text{ converge}\}$.

Exercice 9.

1. Montrer que $1_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.
2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors $f' : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.
3. Montrer que toute fonction monotone $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Exercice 10. Soient $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et $M > 0$.

Montrer que $g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < M \\ -M & \text{si } f(x) \leq -M \\ M & \text{si } f(x) \geq M \end{cases}$ est mesurable.

Exercice 11. Donner un exemple d'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et de fonction $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tels que $|f|$ soit mesurable mais pas f .

Exercice 12.

1. Montrer que $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : A \cap \mathbb{N} = \emptyset \text{ ou } \mathbb{N} \subset A\}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ définie par $f(n) := n + 1$ est mesurable et bijective mais que $f^{-1} : (\mathbb{Z}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ n'est pas mesurable.

Exercice 13. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que si $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(\{x \in E : f(x) > \varepsilon\}) > 0$.

Exercice 14. Montrer que $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) := \sum_{a \in A} a$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 15. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $(E, \mathcal{A})$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

1. Montrer que $\mu := \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \mu_n$ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
2. Montrer que $\nu(A) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)$ ne définit pas toujours une mesure.

Exercice 16. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.
2. On suppose $\mu(E) < +\infty$. Montrer que $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n)$.
3. Donner un exemple montrant que cette dernière inégalité peut être fausse si $\mu(E) = +\infty$.
4. (Lemme de Borel–Cantelli.) On suppose $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 17. On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$ et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) = 1$ sinon.

1. Montrer que μ est une mesure.
2. Est-ce que μ définit une mesure pour $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Exercice 18. Montrer qu'il n'existe pas de mesure μ sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit finie, non nulle et invariante par translation.

Exercice 19. L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Vitali : il n'existe pas d'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ tel que $\mathcal{A}$ contienne toutes les parties bornées, $\mu([0, 1]) = 1$ et μ soit invariante par translation.

1. Vérifier que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute classe d'équivalence de $\mathbb{R}/\sim$ admet un représentant dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On choisit un représentant dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ pour chaque classe d'équivalence et on note A l'ensemble obtenu.

3. Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q}, (A + r) \cap (A + s) \neq \emptyset \implies r = s$.
4. Montrer que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(A + \frac{1}{k+2}\right) \subset [0, 1]$.
5. Montrer que $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$.

6. Conclure.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On note λ la mesure de Borel–Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Montrer que $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) := \lambda(f(A))$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
3. Montrer que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(f(A)) = |a| \lambda(A)$.
On pourra traiter le cas $a = 0$ séparément avec la convention $0 \cdot \pm\infty = 0$.

Exercice 21. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Démontrer que toute partie d'un négligeable est négligeable, et toute réunion dénombrable de négligeables est négligeable.
2. Montrer que la relation " $f = g$ presque partout" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Montrer que si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est complet, si $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable et si $g = f$ p.p., alors g est mesurable.
4. Montrer que $(E, \mathcal{P}(E), \mu)$ est complet pour toute mesure μ , et que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ est complet pour la mesure de comptage.