

Intégrale de Lebesgue

Feuille de TD n°1

Exercice 1. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

1. Simplifier $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.
2. Simplifier $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. A-t-on toujours $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$?
4. (a) Montrer que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
(b) Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 2. Soit E un ensemble.

1. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
2. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = A \cup B \implies A = B$.

Exercice 3. Soit E un ensemble.

On rappelle que pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ désigne la *différence symétrique*.

1. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \Delta B)^c = A^c \Delta B^c = A \Delta B^c$.
3. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
4. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
5. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \Delta B = C \Delta D$ si et seulement si $A \Delta C = B \Delta D$.

Exercice 4. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

1. Montrer que les inclusions suivantes vues dans le cours peuvent être strictes.
 - (a) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E), f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
 - (b) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$;
 - (c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$;
 - (d) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est injective ;
 - (ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E), f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
 - (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$;
 - (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)$.
3. (a) Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f)$.
(b) En déduire que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 5. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que $\forall C \in \mathcal{P}(G), (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F), (f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 6. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

1. Exprimer $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}$ et $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ en termes de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Traduire en termes d'indicatrices les énoncés suivants : $A \subset B$; $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = E$; $B = E \setminus A$.
3. Traduire en termes d'ensembles les énoncés suivants : $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \leq 1$; $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C = 1$; $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C = 0$;
 $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C$.

Exercice 7. Déterminer $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans chacun des cas suivants, et dire si la suite converge.

1. La suite de parties de $\mathbb{R}$ définie par $A_n := \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right]$.
2. La suite de parties de $\mathbb{R}$ définie par $A_n := \left]-\frac{1}{n+1}, 1\right[$ si n est impair et $A_n := \left]-1, \frac{1}{n+1}\right[$ si n est pair.
3. La suite de parties de $\mathbb{N}$ définie par $A_n := \{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : k \text{ divise } n\}, n \geq 1$.
4. La suite de parties de $\mathbb{Z}$ définie par $A_n := n\mathbb{Z}$.
5. La suite de parties de $\mathbb{Q}$ définie par $A_n := \left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}, n \geq 1$.

Exercice 8. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E .

Montrer que $(A_n)_n$ converge vers A si et seulement si $(\mathbb{1}_{A_n})_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_A$.

Exercice 9. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $\limsup_n (A_n \cup B_n) = \limsup_n A_n \cup \limsup_n B_n$.
2. (a) Montrer que $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset \limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n$.
(b) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Énoncer et démontrer les résultats correspondants pour $\liminf$.
4. On suppose que $(A_n)_n$ converge vers A et $(B_n)_n$ vers B . Montrer que $(A_n \cup B_n)_n$, $(A_n \cap B_n)_n$ et $(A_n \Delta B_n)_n$ convergent respectivement vers $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \Delta B$.

Exercice 10. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E .

Montrer que $(A_n)_n$ converge vers A si et seulement si $A_n \Delta A$ converge vers $\emptyset$.

Exercice 11. Soit E un ensemble fini. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

Exercice 12. Soit E un ensemble.

1. On suppose E fini.
 - (a) Pour $k \in \{0, 1, \dots, |E|\}$, déterminer le cardinal de $\{A \in \mathcal{P}(E) : |A| = k\}$.
 - (b) En déduire que $\mathcal{P}(E)$ est fini et déterminer $|\mathcal{P}(E)|$.
 - (c) Trouver une autre démonstration par récurrence sur $|E|$.
2. Réciproquement, montrer que si $\mathcal{P}(E)$ est fini alors E l'est aussi.

Exercice 13. Soit E un ensemble fini.

Exprimer $|\{(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : A \cup B = E\}|$ en termes de $|E|$.

Exercice 14. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si $E \subset F \subset G$ et $|E| = |G|$ alors $|E| = |F|$.

Exercice 15.

1. Déterminer $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$.
2. Déterminer $|\mathbb{N}^{\{0,1\}}|$.

Exercice 16.

1. Déterminer le cardinal de $S := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ est fini}\}$.
2. Est-ce que l'ensemble $T := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ est infini}\}$ est dénombrable?

Exercice 17. Montrer qu'un ensemble est infini si et seulement s'il admet une partie propre de même cardinal.

Exercice 18. Montrer que $]0, 1[=]0, 1] = |\mathbb{R}|$.

Exercice 19.

1. Montrer de façon concise que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.
2. Montrer plus précisément que $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$.

Exercice 20. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.

Exercice 21. Existe-t-il un ensemble E tel que $|\mathcal{P}(E)| = \aleph_0$?

Exercice 22.

1. Montrer que $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|$.
2. Montrer que $\Phi : \begin{cases} C^0(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \\ f & \mapsto & f|_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ est injective.
3. En déduire que $|C^0(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$.