Université d'Angers – 2026/2027

Intégrale de Lebesgue

CC du 22/10/2026.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. *Les huit questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.*

(1) Donner la définition d'une fonction étagée.

(2) Soient $f : E \to F$ une application et $(B_n)_n \in \mathcal{P}(F)^{\mathbb{N}}$. Montrer que $f^{-1}\left(\limsup_n B_n\right) = \limsup_n f^{-1}(B_n)$.

(3) Soit E un ensemble. Étant données $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on rappelle que $A\Delta B \coloneqq (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ désigne la *différence symétrique* de A et B.
   a. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\forall x \in E,\ \left(\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \geq 1 \implies x \in A \cup B\right)$.
   b. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ \mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.
   c. En déduire que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

(4) Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) > 2^{-n}\}$ n'est pas dénombrable.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

(5) Montrer que $\left|[17, 42[\right| = |\mathbb{R}|$.
Remarque : vous avez le droit d'utiliser tous les résultats du cours mais pas ceux des exercices du TD.

(6)
   a. Montrer que $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ définie par $f(x) \coloneqq \lfloor x \rfloor$ est mesurable.
   On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, i.e. l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
   b. Déterminer la mesure image $f_*\lambda$ sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ (où λ désigne la mesure de Borel–Lebesgue).

(7) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré où $\mu(E) = 1$ (on dit que μ est une *mesure de probabilité*).
Montrer que $\mathscr{B} \coloneqq \{A \in \mathscr{A} \ : \ \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$ définit une tribu sur E.

(8) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\forall x \in E,\ \{x\} \in \mathscr{A}$ et $\mu(E) < +\infty$. On dit que $x \in E$ est un *atome* de μ si $\mu(\{x\}) > 0$. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $A_n \coloneqq \left\{x \in E \ : \ \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n}\right\}$.
   a. Soient $x_1, \ldots, x_k \in A_n$ deux à deux distincts. Montrer que $k \leq n\mu(E)$.
   b. En déduire que A_n est fini.
   c. Montrer que l'ensemble des atomes est dénombrable.

Exercice 2. *Mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$*

Soient E un ensemble et $x \in E$. On rappelle que $\delta_x : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ défini par $\delta_x(A) \coloneqq 1$ si $x \in A$ et $\delta_x(A) \coloneqq 0$ sinon est une mesure sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée *mesure de Dirac en x*.
On admet que si une série est à termes dans $[0, +\infty]$ alors on peut sommer dans un ordre quelconque et par paquets sans modifier la valeur de la somme.

(1) Soit μ une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \sum_{n \in A} \mu(\{n\})$.

(2)
   a. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\nu(A) \coloneqq \sum_{n \in A} a_n$ définit une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
   b. En déduire une bijection entre l'ensemble des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et $[0, +\infty]^{\mathbb{N}}$.
   c. Soit μ la mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ associée à la suite $\left(2 \cdot 3^{-n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que $\mu(\mathbb{N}) = 1$ mais qu'il n'existe pas $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\mu(A) = \frac{1}{2}$.

(3)
   a. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ et telle que $\mu(\mathbb{N}) = 1$.
   Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = \delta_k$.
   b. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathscr{A} \coloneqq \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ et on considère la mesure $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) \coloneqq 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) \coloneqq 1$ sinon.
   Montrer que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ mais que μ n'est pas une mesure de Dirac.
   c. Pourquoi le résultat de la question (3)a. ne s'étend-il pas à $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$?

Solution de l'exercice 1.

(1) Une fonction étagée sur un espace mesurable $(E, \mathscr{A})$ est une fonction mesurable $(E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ prenant un nombre fini de valeurs.

(2) Puisque l'image réciproque commute avec les intersections quelconques et les réunions quelconques, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\limsup_n B_n\right) &= f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} B_k\right) \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right) \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} f^{-1}\left(B_k\right) \\ &= \limsup_n f^{-1}(B_n) \end{aligned}$$

Méthode alternative. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\limsup_n B_n\right) &\iff f(x) \in \limsup_n B_n \\ &\iff f(x) \in B_n \text{ pour une infinité de } n \\ &\iff x \in f^{-1}(B_n) \text{ pour une infinité de } n \\ &\iff x \in \limsup_n f^{-1}(B_n). \end{aligned}$$

(3) a. Montrons la contraposée. Soit $x \in E$ tel que $x \in (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ alors $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 0 < 1$.

Méthode alternative. Soit $x \in E$ tel que $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \geq 1$.
Supposons que $x \notin A$ alors $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \geq 1$ d'où $\mathbb{1}_B(x) = 1$ (puisqu'à valeurs dans $\{0, 1\}$) et ainsi $x \in B$. Donc $x \in A \cup B$.

b. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$. Le tableau suivant représente toutes les situations possibles selon l'appartenance de x à A et B.

		$\mathbb{1}_{A\Delta B}$	$\lvert\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\rvert$
$x \in A$	$x \in B$	0	$\lvert 1-1\rvert = 0$
$x \in A$	$x \notin B$	1	$\lvert 1-0\rvert = 1$
$x \notin A$	$x \in B$	1	$\lvert 0-1\rvert = 1$
$x \notin A$	$x \notin B$	0	$\lvert 0-0\rvert = 0$

On observe que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \lvert\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\rvert$ dans tous les cas.

c. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in A\Delta C$ alors

$$1 = \mathbb{1}_{A\Delta C}(x) = \lvert\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_C(x)\rvert \leq \lvert\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x)\rvert + \lvert\mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_C(x)\rvert = \mathbb{1}_{A\Delta B}(x) + \mathbb{1}_{B\Delta C}(x).$$

On déduit de la question (a) que $x \in (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.
Ainsi $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

(4) Supposons par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > 2^{-n}\}$ est dénombrable.
Montrons que $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > 2^{-n}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) > 0$ et, puisque $\lim_n 2^{-n} = 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) > 2^{-n}$, d'où le résultat.
Puisque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > 2^{-n}\}$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, on obtient que $\mathbb{R}$ est dénombrable, d'où une contradiction.

(5) Puisque $[17,42[\subset \mathbb{R}$, on a $\left|[17,42[\right| \leq |\mathbb{R}|$.
Considérons $f : \mathbb{R} \to [17,42[$ définie par $f(x) \coloneqq 17 + 25\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)\right)$.
Remarquons d'abord que f est bien définie puisque, pour $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ d'où $f(x) = 17 + 25\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)\right) \in]17,42[\subset [17,42[$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $\arctan(x) = \arctan(y)$ d'où $x = y$ puisque arctan est injective.
Ainsi f est injective et par conséquent $|\mathbb{R}| \leq \left|[17,42[\right|$.
On déduit du théorème de Cantor–Schröder–Bernstein que $\left|[17,42[\right| = |\mathbb{R}|$.

Remarque. D'autres fonctions conviennent, par exemple $x \mapsto 17 + 25\frac{e^x}{1+e^x}$.

(6) a. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ alors $f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in A}\{n\}\right) = \bigcup_{n\in A} f^{-1}(\{n\}) = \bigcup_{n\in A}[n, n+1[\in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ comme union dénombrable de boréliens. On a bien montré que $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, i.e. que f est mesurable.

b. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ alors

$$f_*\lambda(A) = \lambda(f^{-1}(A)) = \lambda\left(\bigsqcup_{n\in A}[n, n+1[\right) = \sum_{n\in A}\lambda([n, n+1[) = \sum_{n\in A} 1 = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $f_*\lambda$ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

(7)
- $E \in \mathscr{A}$ et $\mu(E) = 1$, donc $E \in \mathscr{B}$.
- Soit $A \in \mathscr{B}$. Alors $A \in \mathscr{A}$ et $\mu(A) \in \{0,1\}$.
  Ainsi $A^c \in \mathscr{A}$ et, puisque $\mu(A) \leq \mu(E) = 1 < +\infty$, on a $\mu(A^c) = \mu(E) - \mu(A) = 1 - \mu(A) \in \{0,1\}$.
  Donc $A^c \in \mathscr{B}$.
- Soient $(A_n)_n \in \mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ et $A \coloneqq \bigcup_n A_n$. Alors $A \in \mathscr{A}$.
  - S'il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) = 1$, alors par croissance de μ, on a $1 = \mu(A_{n_0}) \leq \mu(A) \leq \mu(E) = 1$, donc $\mu(A) = 1$ et $A \in \mathscr{B}$.
  - Sinon, $\mu(A_n) = 0$ pour tout n, et $0 \leq \mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$, donc $\mu(A) = 0$ et $A \in \mathscr{B}$.

Donc $\mathscr{B}$ est une tribu sur E.

(8) a. Les singletons $\{x_1\}, \ldots, \{x_k\}$ sont mesurables et deux à deux disjoints, d'où

$$\frac{k}{n} \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(\{x_i\}) = \mu(\{x_1, \ldots, x_k\}) \leq \mu(E).$$

Ainsi $k \leq n\mu(E)$.

b. Supposons par l'absurde que A_n est infini. Puisque $\mu(E) < +\infty$, A_n contient $k \coloneqq \lfloor n\mu(E)\rfloor + 1$ éléments deux à deux distincts, ainsi, d'après la question précédente, $n\mu(E) \geq k > n\mu(E)$. D'où une contradiction.

c. Soit $x \in E$ un atome alors $\mu(\{x\}) > 0$. Puisque $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $\mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n}$, i.e. $x \in A_n$. Ainsi l'ensemble des atomes est inclus dans $\bigcup_n A_n$ qui est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. Donc l'ensemble des atomes est dénombrable (comme partie d'un ensemble dénombrable).

Solution de l'exercice 2.

(1) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors $A = \bigsqcup_{n\in A}\{n\}$ est une réunion dénombrable (car $A \subset \mathbb{N}$) de parties deux à deux disjointes d'où
$$\mu(A) = \sum_{n\in A} \mu(\{n\}).$$

(2) a.
- $\nu(\varnothing) = 0$;
- Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ une suite de parties deux à deux disjointes et $A \coloneqq \bigsqcup_m A_m$. En sommant par paquets, on obtient
$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(A_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in A_m} a_n = \sum_{n\in\bigsqcup_m A_m} a_n = \sum_{n\in A} a_n = \nu(A).$$

Donc ν est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

b. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit
$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M} & \to & [0,+\infty]^{\mathbb{N}} \\ \mu & \mapsto & (\mu(\{n\}))_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} [0,+\infty]^{\mathbb{N}} & \to & \mathcal{M} \\ (a_n)_n & \mapsto & \left(A \mapsto \sum_{n\in A} a_n\right) \end{cases}.$$

(Ψ est bien définie d'après la question précédente)
- Pour $\mu \in \mathcal{M}$, on a $\Psi(\Phi(\mu))(A) = \sum_{n\in A} \mu(\{n\}) = \mu(A)$ d'après la question (1), donc $\Psi\circ\Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.
- Pour $(a_n)_n \in [0,+\infty]^{\mathbb{N}}$, on a $\Psi((a_n)_n)(\{k\}) = a_k$, donc $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{[0,+\infty]^{\mathbb{N}}}$.

Ainsi Φ et Ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

c. On a $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\cdot 3^{-n-1} = \frac{2}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{-n} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$.

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Si $0 \in A$ alors $\mu(A) \geq \mu(\{0\}) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.
- Si $0 \notin A$ alors $\mu(A) \leq \mu(\mathbb{N}\setminus\{0\}) = \mu(\mathbb{N}) - \mu(\{0\}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Dans les deux cas $\mu(A) \neq \frac{1}{2}$.

(3) a. D'après la question (1), on a $1 = \mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\})$ où chaque $\mu(\{n\}) \in \{0,1\}$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\{k\}) = 1$ (sinon on aurait $1 = 0$) et pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{k\}$ on a $\mu(\{n\}) = 0$ (sinon on aurait $1 \geq 2$).
Ainsi pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a
$$\mu(A) = \sum_{n\in A} \mu(\{n\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_k(A).$$

Concernant l'unicité, soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = \delta_l$ alors $1 = \mu(\{k\}) = \delta_l(\{k\})$ d'où $l \in \{k\}$, i.e. $k = l$.

b. Puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, on a $\mu(\mathbb{R}) = 1$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \delta_x$. On a $\{x\} \in \mathscr{A}$ et $\mu(\{x\}) = 0$ (puisqu'un singleton est dénombrable), alors que $\delta_x(\{x\}) = 1$. D'où une contradiction.

c. On ne peut pas procéder comme dans la question (3)a. car la réunion disjointe $\mathbb{R} = \bigsqcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ n'est pas dénombrable.