

INTRODUCTION



2 septembre 2026

Intégrale de Lebesgue



CM : Jean-Baptiste Campesato

TD : Jean-Baptiste Campesato et Rodolphe Garbit



Séances : 17 CM et 24 TD.



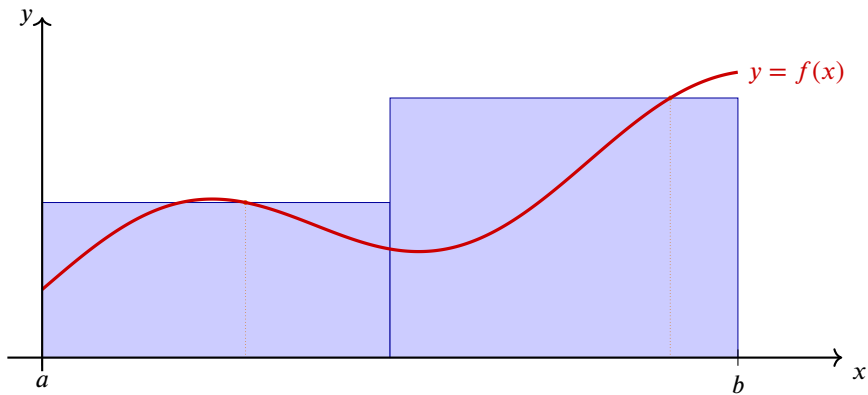
E-mail : jb.campesato@univ-angers.fr

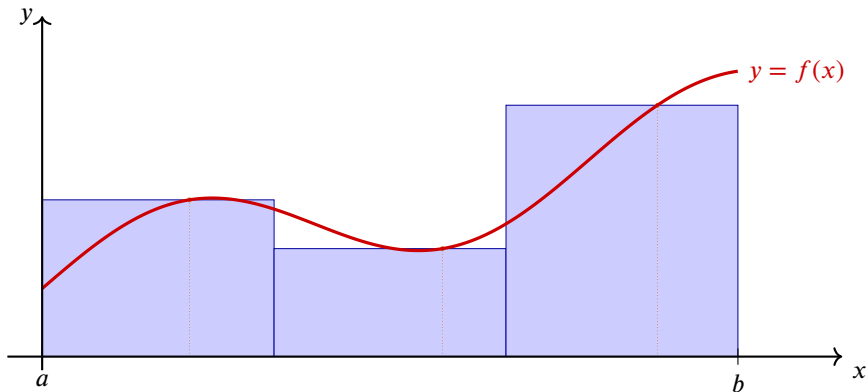


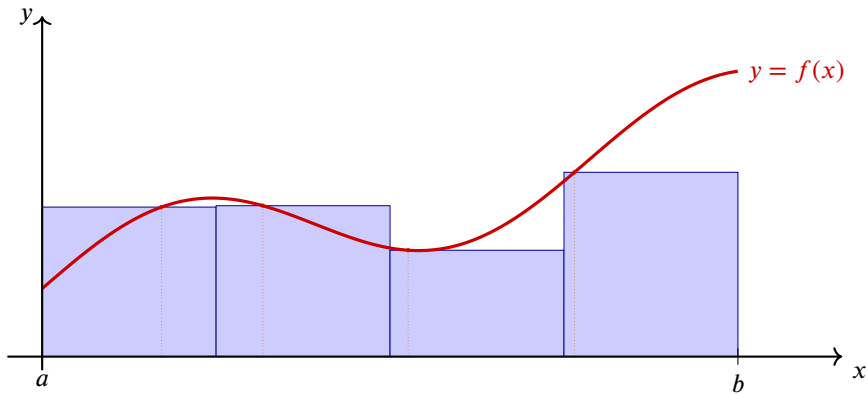
Notes de cours : <https://math.univ-angers.fr/~campesato/ens/Lebesgue.pdf>

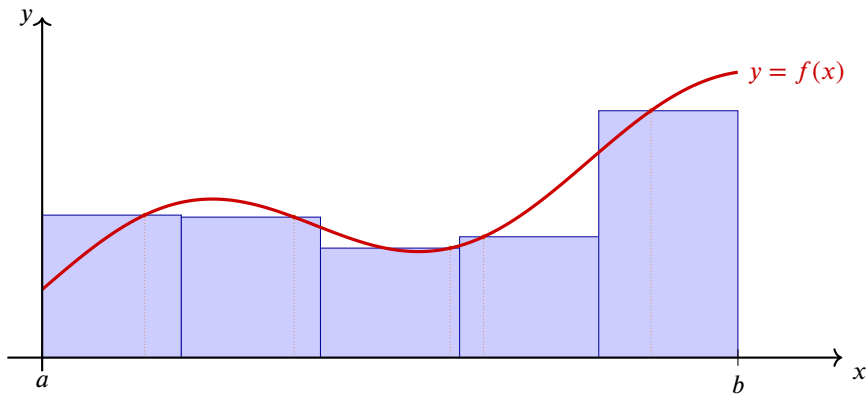


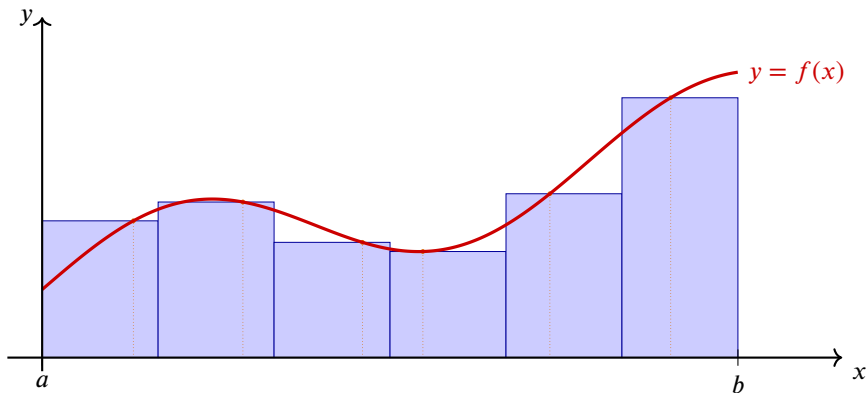
- 1 Prérequis
- 2 Tribus et mesures
- 3 Intégrale selon une mesure
- 4 Mesure de Lebesgue
- 5 Théorème de Fubini
- 6 Espaces $\mathcal{L}^p$



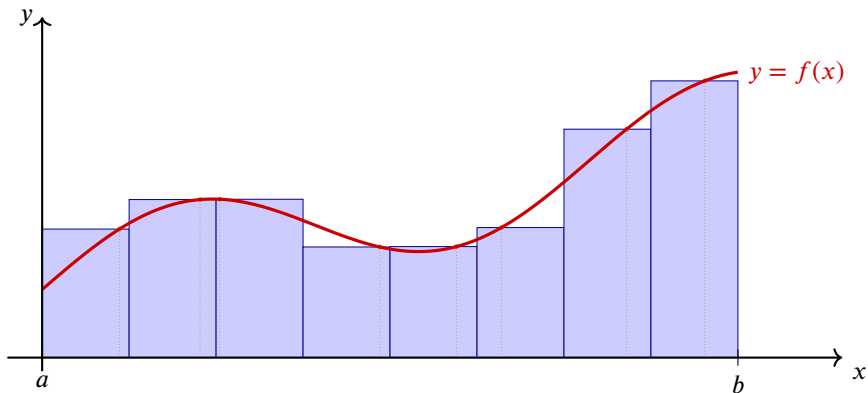


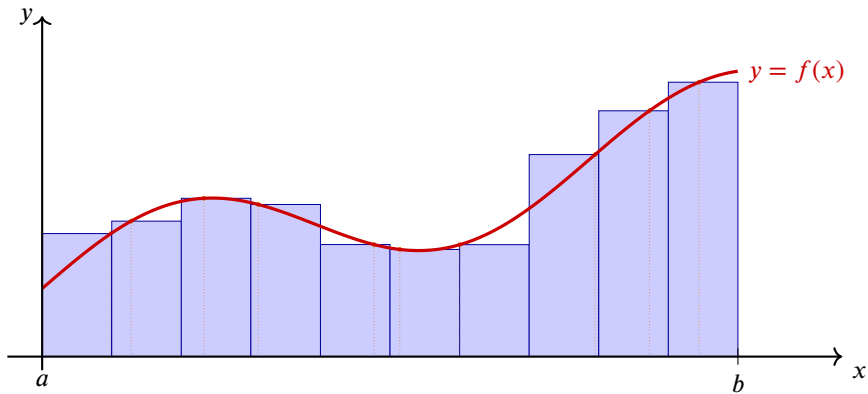




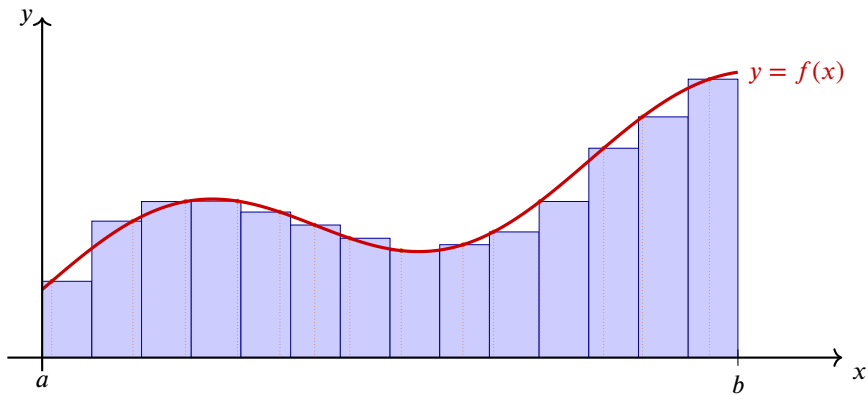


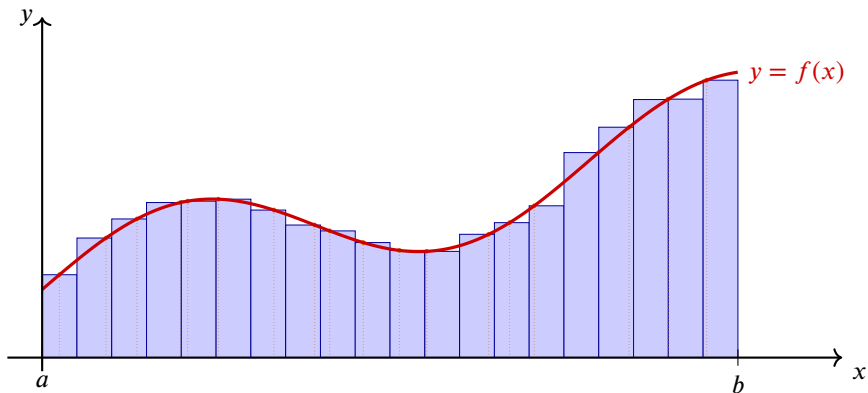
Intégrale de Riemann – 1

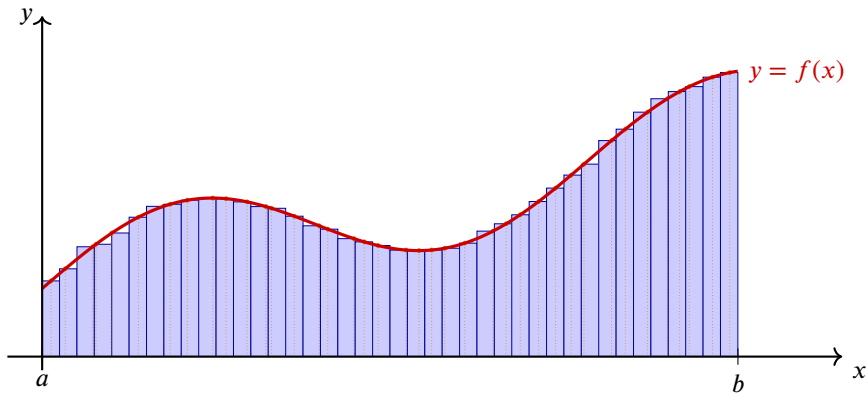




Intégrale de Riemann – 1







Faiblesses de la théorie :

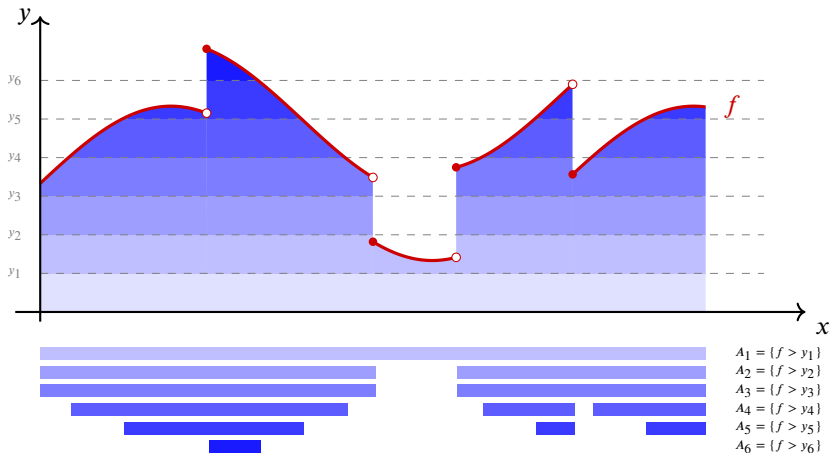
- L'intégrale de Riemann n'a de sens que pour les fonctions définies sur un segment.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^{cn} \frac{x}{1+x^2} dx = \ln c.$$

- Pas assez de fonctions Riemann intégrables (fonctions pas trop discontinues).
En particulier, l'intégrabilité au sens de Riemann n'est pas stable par limite simple (il faut convergence uniforme).
- Pas le bon cadre pour l'analyse fonctionnelle (les fonctions Riemann intégrables ne forment pas un espace complet).
- Le théorème d'interversion des intégrales de Riemann multiples nécessite des hypothèses fortes sur la continuité pour que

$$\iint dx dy = \iint dy dx.$$

Intégrale de Lebesgue : on découpe l'axe des ordonnées



$$\int f \, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\}) \, dt \simeq \sum_k (y_{k+1} - y_k) \lambda(A_k)$$