Université d'Angers – 2025/2026

Topologie et calcul différentiel

TD n°2 : calcul différentiel

Exercice 1.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

$$f_a(x) = \begin{cases} xe^{-a/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} |x|\cos(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2.
On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|_2^2}.$$

Calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 3.
Étudier la continuité, l'existence des dérivées directionnelles et la différentiabilité des fonctions suivantes en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}\,\sin\sqrt{x^2+y^2},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$h_{a,b}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases},$$

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3$. Quelle est la différentielle de f ? Donner sa matrice jacobienne et son gradient.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \neq y, \\ f'(x) & x = y \end{cases}.$$

Montrer que g est $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 6.
Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients réels. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

Soit $q \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_q[X]$ et $F = \mathbb{R}_{3q}[X]$. On considère l'application $\phi : E \to F : \phi(P) = P^3$.

1. Montrer que N est une norme et qu'elle vérifie :

$$N(PQ) \leq N(P)N(Q), \quad P, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

2. Montrer que N est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $P \in E$. Montrer que ϕ est C^1.
3. Quand $q = 1$ donner la matrice jacobienne de ϕ dans les bases canoniques.

Exercice 7 (Algorithme pour approcher l'inverse d'une matrice)**.**
Soit E l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$ muni d'une norme telle que $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$. Soit $A \in E$ inversible. Pour $X \in E$, on pose :

$$F(X) = 2X - XAX.$$

1. Montrer que $F : E \to E$ est C^1. Calculer $F(A^{-1})$ et $dF_{A^{-1}}$.
2. On pose $X_{p+1} = F(X_p)$, $p \geq 0$. Montrer que X_p converge vers A^{-1} dès que X_0 est dans une boule convenable.
3. Résoudre la relation de récurrence en posant $Y_p = \mathrm{Id} - AX_p$. Que dire de la convergence de X_p ?

Exercice 8 (Gradient et lignes de niveaux)**.**
Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère $c \in \mathbb{R}$ et on pose

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x) = c\}\,.$$

On considère une fonction dérivable $I \ni s \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer la dérivée de $f \circ \gamma$.
2. Si γ est à valeurs dans M, que dire des vecteurs $\nabla f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$? Représenter cette propriété sur un dessin.

Exercice 9 (Différentielle du déterminant)**.**
Soit E l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$.

1. Montrer que $\det : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en Id et donner l'expression de sa différentielle.
2. Le déterminant est-il une application C^1 sur E ?
3. Montrer que pour tout $X, H \in E$, on a :

$$d(\det)_X(H) = \mathrm{Tr}(\overline{X}^{\mathrm{T}} H)\,,$$

   où $\overline{X}$ est la comatrice de X.
4. Soient $y_1, \cdots, y_p$ des solutions C^1 (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) du système différentiel linéaire $y'(t) = A(t)y(t)$, où A est continue sur I à valeurs dans E. Déterminer une équation différentielle satisfaite par $w(t) = \det(y_1(t), \cdots, y_n(t))$.

Exercice 10 (Identité de l'arctangente)**.**
Soit $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 1\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Montrer que f est C^1 et calculer sa différentielle. Conclure.

Exercice 11 (Équation de transport)**.**
Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$c\partial_x f(x,t) + \partial_t f(x,t) = 0\,.$$

Indice : Si f est une telle fonction, considérer $g(x,t) = f(x + ct, t)$.

Exercice 12.
Soient E et F des evn. Soit $f \in C^1(E, F)$. Montrer que f est k-lipschitzienne si et seulement si pour tout $a \in A$, on a : $\|df_a\| \leq k$.

Exercice 13.
Soient E et F des evn. Soit U un ouvert de E et une suite d'applications $f_k : U \to F$ différentiables. On suppose que les f_k convergent simplement vers f sur U et que les df_k convergent uniformément sur U.

Montrer que f est différentiable sur U et donner sa différentielle. Si de plus les f_k sont C^1, montrer que f l'est aussi.

Indice : Appliquer l'inégalité de accroissements finis à $f_m - f_n$ entre a et $a+h$.

Exercice 14.
Soit E l'espace des matrices carrées de taille n. Que dire de la régularité de $X \mapsto X^p$ pour $p \geq 1$? Si c'est possible, calculer sa différentielle et sa différentielle seconde.

Exercice 15 (Différentiabilité de l'exponentielle matricielle)**.**
Soit E l'espace des matrices carrées de taille n. On pose, pour $k \geq 0$ et $X \in E$:

$$f_k(X) = \sum_{p=0}^{k} \frac{X^p}{p!}.$$

En utilisant la suite f_k, montrer que exp est C^1.

Exercice 16 (Un exemple de calcul de différentielle en dimension infinie)**.**
Soient $I = [0,1]$, $F = C^0(I, \mathbb{R})$, $E \subset F$ le sous-espace des fonctions C^1 nulles en 0. On munit F de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et E de la norme $\|x\|_1 = \|x'\|_\infty$. Montrer que $f : E \to F$ définie par $f(x) = x' + x^2$ est de classe C^1 sur E. Calculer sa différentielle.

Exercice 17 (Calculs de Laplaciens)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, on pose :

$$\Delta f = \partial_{x_1}^2 f + \cdots + \partial_{x_n}^2 f.$$

1. Donner une expression pour $\Delta(fg)$.
2. Calculer Δf pour $f(x,y) = (\cos x - \sin x)e^y$.
3. On pose $g_n(x) = \ln \|x\|_2$ pour $n = 2$ et $g_n(x) = \|x\|_2^{2-n}$ pour $n \geq 3$; calculer Δg_n.

Exercice 18.
Pour $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $A \in O(n)$, montrer que $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$.

Exercice 19 (Une équation de Schrödinger)**.**
Trouver un nombre $\lambda < 0$ et une fonction non nulle $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tels que

$$-\Delta u(x) - \frac{u(x)}{\|x\|_2} = \lambda u(x)\,.$$

Indice : On pourra chercher une telle fonction sous la forme $u(x) = f(\|x\|_2)$ et exprimer Δu en fonction des dérivées de f.

Exercice 20 (Différentiation composée)**.**
Soient a, b, c, d des réels et f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x,y) = f(ax+by, cx+dy)\,.$$

Donner toutes les dérivées partielles de g jusqu'à l'ordre 2 en fonction de celles de f.

Exercice 21 (Équation des ondes)**.**
Trouver les applications $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Exercice 22.
Étudier la nature des points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 e^x$,
2. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} + x^2 + 2xy + y^2$,
3. $g(x,y,z) = xy + xz + yz$,
4. $h(x,y,z) = (x+y)^2 + \sin(xz) + \frac{z^2}{2}$.

Exercice 23.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(u) = (u-1)^2(u+1), \quad \phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz\,.$$

On pose $F = f \circ \phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que ϕ est une forme quadratique définie positive.
2. Montrer que a est un point critique de F si et seulement si $a = (0,0,0)$ ou $\phi(a) = 1$.
3. Calculer la hessienne de F en $(0,0,0)$. Quelle est la nature de ce point critique ?
4. Montrer que F est positive. Que dire des points critiques différents de $(0,0,0)$?

Exercice 24 (Existence de valeurs propres)**.**
Soit A une matrice carrée symétrique réelle de taille n. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2}\,,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne et $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Comparer $\langle Ax, y\rangle$ et $\langle x, Ay\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'infimum $\inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)$ est atteint en un point x_0 de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que A possède une valeur propre réelle.

Exercice 25 (Fonctions surharmoniques)**.**
Soit U un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^2$. On considère $u \in C^2(U,\mathbb{R}) \cap C^0(\overline{U},\mathbb{R})$ telle que $\Delta u(x) > 0$ pour tout $x \in U$. Montrer que u admet un maximum sur $\overline{U}$ et que ce dernier n'est pas atteint sur U.

Exercice 26.
Trouver les extrema de $f(x,y) = xy$ sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 27.
On considère la fonction $g\ :]0,+\infty[^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y,z) = xyz - 32$. On pose $S = \{(x,y,z) \in\ ]0,+\infty[^3 :\ g(x,y,z) = 0\}$ et $f(x,y,z) = xy + 2yz + 3xz$.

1. Montrer que $f_{|S}$ possède un minimum (qu'on note m).
2. Déterminer m.

Exercice 28.
Trouver les extrema de $f(x,y,z) = 2x+3y+2z$ sur l'intersection du plan $x+z = 1$ et de $C = \{x^2+y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 29 (Distance d'un point à une ellipse)**.**
Soient λ_1 et λ_2 deux nombres strictement positifs. On considère l'ellipse donnée par

$$C = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \leq 1\}\,,$$

et un point $A \notin C$ de coordonnées (a_1,a_2). Exprimer la distance entre A et C en fonctions des λ_j et a_j.

Indice : On pourra commencer par montrer que cette distance est atteinte et que les coordonnées (m_1,m_2) d'un point qui réalise cette distance vérifient $\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 = 1$.