Topologie et calcul différentiel

TD n°1 : topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1.
Dessiner la boule fermée unité, i.e. centrée en 0 de rayon 1, pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 2.
Soient E un espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\forall x \in E \setminus \{0\},\ N(x) > 0$
(ii) $N(0) = 0$
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in E,\ N(x + \lambda y) \leq N(x) + |\lambda| N(y)$
Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 3.
Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p > 1$. On définit $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$\|(x_1, \dots, x_d)\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. On pose $q \coloneqq \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   Montrer que $\forall a, b \geq 0,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

   On pourra commencer par appliquer la question précédente à $a \coloneqq \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b \coloneqq \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$.
   Le cas $p = q = 2$ est appelé inégalité de Cauchy–Schwarz.
3. En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.
4. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 4.
Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.
On définit $\|\cdot\|_p : C^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par $\|f\|_p \coloneqq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
   On pourra adapter les solutions de l'Exercice 3 en remplaçant $\sum$ par $\int$.
2. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 5.
Montrer que les couples $(E, \|\cdot\|)$ suivants sont des espaces vectoriels normés :

1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|\cdot\|_m : \sum a_i X^i \mapsto \sum |a_i| m^i$ où $m \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. $E = \mathbb{R}\{x\}_\rho$ l'espace vectoriel des séries entières réelles de rayon de convergence $\geq \rho$ et

$$\|\cdot\|_m : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 0} |a_i| m^i$$

   où $m, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ et $m < \rho$.
3. $E = \mathrm{Lip}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$, où $a < b$, et

$$\|f\| \coloneqq \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x, y \in [a,b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

4. $E = \ell^p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;:\; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ où $p \in [1, \infty[$.
5. $E = \ell^\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée$\}$ et $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
6. $E = C^0([a,b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions $[a,b] \to F$ continues $\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_F$ où $a < b$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.
7. $E = \mathcal{B}(X, F)$ l'espace vectoriel des fonctions $X \to F$ bornées et $\|f\| := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_F$ où X est un ensemble et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 6.

1. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés.
   Montrer que $(E := E_1 \times \ldots \times E_n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, où $\|(u_1, \ldots, u_n)\| := \max_{i=1,\ldots,n}(\|u_i\|_i)$.
2. Soit $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels normés.
   Montrer que l'espace vectoriel

   $$E := \left\{ (f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \;:\; \sup_{i\in I} \|f_i\|_i < \infty \right\}$$

   muni de l'application

   $$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (f_i)_{i\in I} & \mapsto & \sup_{i\in I} \|f_i\|_i \end{array}$$

   est un espace vectoriel normé.

Exercice 7.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que l'espace vectoriel E/F muni de l'application

$$\|\cdot\|_{E/F} : \begin{array}{ccc} E/F & \to & \mathbb{R} \\ \overline{x} & \mapsto & \inf_{u\in\overline{x}} \|u\| \end{array}$$

est un espace vectoriel normé.

Exercice 8.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.
Montrer que l'application $\|\cdot\|_E : (E, \|\cdot\|_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue.

Exercice 9.

1. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   (a) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{Q}$.
   (b) Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ?
   i. $\emptyset$ ii. $[42, +\infty[$ iii. $]-17, 9]$ iv. $]-\pi, \pi[$ v. $\mathbb{Q}$ vi. $\{x \in \mathbb{R} \;:\; 0 < |x+1| < 2\}$
2. Les parties suivantes de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sont-elles ouvertes ? fermées ?
   (a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < |x+1| < 2\}$
   (b) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le y\}$
   (c) $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| < 1$ et $|y| \le 1\}$
   (d) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}\}$
   (e) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \notin \mathbb{Q}$ ou $y \notin \mathbb{Q}\}$
   (f) $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < 4\}$

Exercice 10.
Dans cet exercice E désigne l'espace des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par

$$\|M\|_\infty := \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |m_{ij}|\,.$$

1. Montrer que (A_n) converge vers $L = (\ell_{ij}) \in E$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $\lim_{n\to+\infty} a_{ij,n} = \ell_{ij}$.
2. Établir que
$$\sum_{n\geq 0} \|M_n\|_\infty < +\infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} M_n \text{ converge}\,.$$
3. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles, noté $GL_n(\mathbb{R})$, est un ouvert de E.
Indice : On pourra considérer une matrice A inversible, remarquer que $A + M = A(\mathrm{Id} + A^{-1}M)$, choisir M de sorte que $\|A^{-1}M\|_\infty < 1$ et utiliser une série géométrique.
4. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E.

Exercice 11.
On considère $E := \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

On définit l'opérateur de Cesàro $T : E \to E$ par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_n$.

1. Montrer que T est bien défini.
2. Montrer que T est une application linéaire continue et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 12.
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
Montrer que S est bornée si et seulement s'il existe $a \in E$ et $r \geq 0$ tels que $S \subset B(a,r)$.

Exercice 13.
1. Montrer qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.
2. Montrer qu'une union finie de compacts est compacte.
3. Une union quelconque de compacts est-elle nécessairement compacte ?

Exercice 14.
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \cap K \neq \varnothing$.
Montrer que $K \cap \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Exercice 15.
Les parties suivantes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont-elles compactes ?
1. $\mathbb{Z}$ 2. $[0,1[$ 3. $]-\infty,1]$ 4. $[0,1]$ 5. $\{-42, \pi, 17\}$ 6. $[e,17[\cup]17,42]$

Exercice 16.
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \to F$ une application continue.
1. Si K est un compact de F, $f^{-1}(K)$ est-il nécessairement un compact de E ?
2. Montrer que c'est toujours le cas si S est compact.

Exercice 17.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.
1. Montrer que $\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.
2. Montrer que $\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.
3. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non-équivalentes sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.
Indice : pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (x-a)^n$.

Exercice 18.
Soit $E \coloneqq \mathbb{R}[X]$.

1. On définit $N_1 : E \to \mathbb{R}$ par $N_1\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$.
   Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. Montrer que $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour la norme N_1.
3. On définit $N_2 : E \to \mathbb{R}$ par $N_2\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \coloneqq \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$.
   Montrer que N_2 est une norme sur E.
4. Montrer que $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ pour la norme N_2.
5. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 19.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour $a \in E$, on note

$$d(a, F) \coloneqq \inf_{x\in F} \|x - a\| .$$

   (a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
   (b) On suppose que $F \neq E$. Soit $a \in E \setminus F$ et $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
   Montrer qu'il existe $b \in E$ tel que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_n$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|b_n\| = 1$ et $d(b_n, \mathrm{Vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1$.
3. En déduire que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte (*lemme de Riesz*).

Exercice 20.
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 21.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ telle que

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing.$$

Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 22.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Que peut-on dire d'une partie A qui est à la fois ouverte et fermée ?