

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.

Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Soient $\|\cdot\|_F$ une norme sur F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F .

On définit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N(x) := \|f(x)\|_F$.

Montrer que N est une norme sur E si et seulement si f est injective.

Exercice 2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

Montrer que si $B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$ alors $\|a - b\| \leq s - r$.

Exercice 3.

On considère $A := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) : f(1) > 0\}$.

(1) Montrer que A est un ouvert de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Indication : pour $f \in A$, on pourra considérer $B(f, f(1))$.

(2) Soit $f \in A$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(x) = f(x) - f(1)x^n$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|f - g_n\|_1$.

b. En déduire que A n'est pas un ouvert de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(3) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4.

(1) Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $f : K \rightarrow K$ une fonction continue vérifiant

$$(H) \quad \forall x, y \in K, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

a. Montrer que la fonction $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \|f(x) - x\|$ s'annule.

b. En déduire que f admet un *unique* point fixe.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 1$ si $x \leq 0$.

a. Montrer que f est continue et vérifie (H) pour la valeur absolue.

b. Montrer que f n'admet pas de point de fixe.

c. Y a-t-il une contradiction avec le résultat de la première question ?

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(1) Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$ le long de $e_1 := (1, 0)$ et $e_2 := (0, 1)$.

(2) Est-ce que f admet une dérivée directionnelle en $(0, 0)$ le long de v pour tout $v \in \mathbb{R}^2$?

Solution de l'exercice 1.

- Supposons que N soit une norme sur E .
Soit $x \in \ker(f)$ alors $N(x) = \|f(x)\|_F = \|0\|_F = 0$. Donc $x = 0$ puisque N est une norme.
Ainsi $\ker(f) = \{0\}$, d'où on déduit que f est injective.
- Supposons que f soit injective.
 - Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $N(\lambda x) = \|f(\lambda x)\|_F = \|\lambda f(x)\|_F = |\lambda| \|f(x)\|_F = |\lambda| N(x)$.
 - Soient $x, y \in E$ alors $N(x+y) = \|f(x+y)\|_F = \|f(x) + f(y)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|f(y)\|_F = N(x) + N(y)$.
 - Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$. Alors $\|f(x)\|_F = 0$ d'où $f(x) = 0$.
Puisque f est injective, on obtient que $x = 0$.

Ainsi N est une norme sur E .

Solution de l'exercice 2.

Explication : l'idée de la démonstration ci-dessous est de considérer le point de $B_f(a, r)$ le plus éloigné de b . Ce point est à distance r de a dans la direction $a - b$, i.e. $x := a + \frac{r}{\|a-b\|}(a-b)$. Il peut être judicieux de faire un dessin.

Solution.

Si $a = b$ alors $r \leq s$ puisque $B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$. On a donc bien $\|a - b\| = 0 \leq s - r$.

Supposons maintenant que $a \neq b$ alors $\|a - b\| \neq 0$. Considérons $x := a + \frac{r}{\|a-b\|}(a-b)$.

Alors $\|x - a\| = \left\| \frac{r}{\|a-b\|}(a-b) \right\| = \frac{r}{\|a-b\|} \|a-b\| = r$.

Donc $x \in B_f(a, r) \subset B_f(b, s)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 s &\geq \|b - x\| = \left\| b - a - \frac{r}{\|a-b\|}(a-b) \right\| \\
 &= \left\| - \left(1 + \frac{r}{\|a-b\|} \right) (a-b) \right\| \\
 &= \left(1 + \frac{r}{\|a-b\|} \right) \|a-b\| \\
 &= \|a-b\| + r
 \end{aligned}$$

d'où $\|a-b\| \leq s-r$.

Solution de l'exercice 3.

- (1) Soit $f \in A$ alors $\varepsilon := f(1) > 0$.

Soit $g \in B(f, \varepsilon)$ alors $f(1) - g(1) \leq \|f - g\|_\infty < \varepsilon = f(1)$ d'où $g(1) > 0$. Donc $g \in A$.

On a bien montré que $\forall f \in A, \exists \varepsilon > 0, B(f, \varepsilon) \subset A$, i.e. que A est un ouvert de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

- (2) a. $\|f - g_n\|_1 = \int_0^1 |f(x) - g_n(x)| dx = \int_0^1 f(1)x^n dx = \frac{f(1)}{n+1}$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\|f - g_n\|_1 = \frac{f(1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - g_N\|_1 < \varepsilon$.

Alors $g_N \in B(f, \varepsilon)$ mais $g_N \notin A$ puisque $g_N(1) = 0$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, B(f, \varepsilon) \not\subset A$, donc A n'est pas un ouvert de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

- (3) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes puisque A est un ouvert pour la première mais pas pour la deuxième.

Solution de l'exercice 4.

- (1) a. La fonction $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ étant continue sur un compact, elle admet un minimum, i.e. il existe $x_0 \in K$ tel que $\forall x \in K, \varphi(x_0) \leq \varphi(x)$.
 Supposons que $\varphi(x_0) \neq 0$ alors $\|f(x_0) - x_0\| \neq 0$, d'où $f(x_0) \neq x_0$.
 Ainsi, d'après (H), $\varphi(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\| = \varphi(x_0)$. D'où une contradiction.
 Donc $\varphi(x_0) = 0$.
- b. D'après la question précédente, il existe $x_0 \in K$ tel que $\|f(x_0) - x_0\| = \varphi(x_0) = 0$, d'où $f(x_0) = x_0$.
 Ainsi x_0 est un point fixe de f .
 Soit $x_1 \in K$ un point fixe de f . Alors $\|f(x_1) - f(x_0)\| = \|x_1 - x_0\|$ d'où $x_0 = x_1$ par (H).
 Par conséquent x_0 est l'unique point fixe de f .
- (2) a. Montrons que f est dérivable (en particulier que f est continue) et que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| < 1$.
- f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et pour tout $x \in] -\infty, 0[, |f'(x)| = 0 < 1$.
 - f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[, |f'(x)| = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} < 1$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x + 1} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $|f'(0)| = 0 < 1$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$ d'où $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| < |x - y|$. Donc f vérifie (H).
- b. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$.
- Premier cas : si $x > 0$.* Alors $\frac{1}{1+x} = 0$ d'où une contradiction.
 - Deuxième cas : si $x \leq 0$.* Alors $1 = x \leq 0$ d'où une contradiction.
- Donc f n'admet pas de point fixe.
- c. Il n'y a pas de contradiction avec l'existence d'un point fixe obtenue dans la première question puisque le domaine de f est $\mathbb{R}$ qui n'est pas compact.

Solution de l'exercice 5.

- (1) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + te_1) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$
 Donc f admet une dérivée directionnelle en $(0, 0)$ le long de e_1 et $\partial_{e_1} f(0) = 0$.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + te_2) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$
 Donc f admet une dérivée directionnelle en $(0, 0)$ le long de e_2 et $\partial_{e_2} f(0) = 0$.
- (2) Posons $v := (1, 1)$. Puisque $\frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \frac{f(t, t)}{t} = \frac{1}{2t}$ n'admet pas de limite lorsque t tend vers 0, f n'admet pas de dérivée directionnelle en $(0, 0)$ le long de v .