Université d'Angers – 2025/2026

Théorie des anneaux

CC du 25/06/2026.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. *Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.*

(1) a. Qu'est-ce qu'un anneau à division ?
  b. Qu'est-ce qu'un anneau noethérien ?

(2) Déterminer un pgcd puis une relation de Bézout de $19 + 22i$ et $8 + 9i$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

(3) Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(1 + i) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

On considère A un anneau commutatif.

(1) Soit $P \in A[X]$. Montrer que $a \in A$ est une racine de P, i.e. $P(a) = 0$, si et seulement si $(X - a)|P$.

(2) a. On suppose que A est intègre. Soit $P \in A[X]$ de degré $d \geq 0$.
  Montrer que P admet au plus d racines.
  b. Est-ce que le résultat est valide pour un anneau commutatif quelconque ? Justifier.

(3) a. On suppose que A est intègre et infini. Montrer que $\varphi : A[X] \to A^A$ défini par $\varphi(P) = (a \mapsto P(a))$ est un morphisme d'anneaux injectif.
  b. Est-ce que φ est nécessairement injectif si A est un anneau intègre fini ?

Exercice 3.

Soit A un anneau commutatif. On dit que $\pi \in A$ est *indivisible* s'il est non nul, non inversible et si

$$\forall a, b \in A,\ \pi = ab \implies \pi|a \text{ ou } \pi|b.$$

On dit que p est *premier* si (p) est un idéal premier non nul.

(1) Montrer qu'un élément premier est indivisible.

(2) a. Montrer qu'un élément irréductible est indivisible.
  b. Montrer que si A est intègre alors un élément est indivisible si et seulement s'il est irréductible.

(3) Montrer que dans un anneau noethérien, tout élément non nul s'écrit comme produit d'un inversible et d'éléments indivisibles.
Indication : on pourra considérer l'ensemble $\{(x) : x \in S\}$ où S est l'ensemble des éléments non nuls ne s'écrivant pas comme produit d'un inversible et d'indivisibles.

(4) Dans toute cette question, on suppose que A est un anneau commutatif fini et on souhaite montrer que tout élément indivisible est irréductible ou premier. Pour cela, on procède par l'absurde en supposant qu'il existe $\pi \in A$ indivisible, non irréductible et non premier.
  a. Montrer qu'il existe $d \in A$ non nul et non inversible tel que $\pi = \pi d$.
  b. Montrer que d est un diviseur de zéro.
  Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $A \ni x \mapsto dx \in A$.

  On fixe $c \in A \setminus \{0\}$ tel que $cd = 0$.
  c. Montrer que $\pi|c$ ou $\pi|d$.
  Indication : on pourra considérer $(\pi + c)d$.
  d. Montrer que si $\pi|c$ alors on aboutit à la contradiction $c = 0$.
  e. On suppose que $\pi|d$. Soit $a \in A$ tel que $d = \pi a$.
    i. Montrer que d est un idempotent différent de 1.
    ii. Montrer que $(\pi) = (d)$.
    iii. Montrer que $((1 - d)A, 0, 1 - d, +, \cdot)$ est un anneau isomorphe à $A/(\pi)$.
    iv. Montrer qu'il existe $s, t \in (1 - d)A$ non nuls tels que $st = 0$.
    v. Montrer que $\pi = (\pi + s)(d + t)$, $\pi \nmid (\pi + s)$ et $\pi \nmid (d + t)$.
  f. Conclure.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq -2$.

(1) Justifier que $z^2 - z - n = 0$ admet deux solutions distinctes complexes conjuguées.
On note ω et $\bar{\omega}$ ces solutions dans la suite.

(2) Exprimer simplement $\omega + \bar{\omega}$ et $\omega\bar{\omega}$.

(3) On pose $\mathbb{Z}[\omega] := \{p + q\omega \ : \ p, q \in \mathbb{Z}\}$.
Justifier que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison.

(4) Montrer que $\forall z \in \mathbb{Z}[\omega]$, $z\bar{z} \in \mathbb{N}$.

(5) Montrer que $p + q\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ est inversible si et seulement si $p^2 + pq - nq^2 = 1$.

(6) En déduire que $(\mathbb{Z}[\omega])^* = \{\pm 1\}$.