Université d'Angers – 2025/2026

Théorie des anneaux

CC du 27/04/2026.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. *Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.*

(1) a. Qu'est-ce qu'un anneau à division ?
   b. Que signifie que deux éléments a et b d'un anneau commutatif A sont associés ?
(2) Déterminer un pgcd puis une relation de Bézout de $1 + 5i$ et $6 + 8i$ dans $\mathbb{Z}[i]$.
(3) Soit A un anneau commutatif dont tout idéal est premier.
   a. Montrer que A est intègre.
   b. Montrer que A est un corps.

Exercice 2.

On considère l'ensemble $A \coloneqq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On définit $\oplus : A \times A \to A$ et $\odot : A \times A \to A$ par

$$(a, b) \oplus (c, d) \coloneqq (a + c, b + d) \qquad \text{et} \qquad (a, b) \odot (c, d) \coloneqq (ac - bd, ad + bc).$$

On pose $\mathbb{0} \coloneqq (0, 0)$ et $\mathbb{1} \coloneqq (1, 0)$.

(1) Montrer que $(A, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ est un anneau commutatif non trivial.
(2) a. Montrer que si $(a, b) \in A \setminus \{\mathbb{0}\}$ alors $a^2 + b^2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$.
   b. En déduire que $(A, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ est un corps.
   Indication : étant donné $(a, b) \neq \mathbb{0}$, on pourra chercher un inverse de la forme $(ax, -bx)$.
(3) Montrer que $B \coloneqq \{(a, 0) \ : \ a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ est un sous-corps de A.

Exercice 3. *Quelques propriétés des anneaux réguliers au sens de von Neumann.*

On dit qu'un anneau A est régulier si $\forall a \in A,\ \exists u \in A,\ aua = a$.

(1) a. Un anneau à division est-il régulier ?
   b. L'anneau $\mathbb{Z}$ est-il régulier ?
(2) On considère $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
   Montrer que si A est un anneau régulier alors $\mathrm{Im}(f)$ l'est aussi.
(3) Soient A et B deux anneaux. Montrer que A et B sont réguliers si et seulement si $A \times B$ l'est.
(4) Soit A un anneau régulier.
   On rappelle que son centre $C(A) \coloneqq \{a \in A \ : \ \forall x \in A,\ ax = xa\}$ est un sous-anneau de A.
   a. Soient $a \in C(A)$ et $u \in A$ tels que $a = aua$. Montrer que $au \in C(A)$.
   b. En déduire que $C(A)$ est régulier.
(5) Montrer que si A est un anneau intègre et régulier alors A est un corps.
(6) Montrer que si A est un anneau commutatif et régulier alors 0 est le seul nilpotent de A.
   On rappelle qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $a^n = 0$.
(7) Soit A un anneau commutatif.
   a. Montrer que si A est régulier alors tout idéal principal de A est engendré par un idempotent (i.e. un élément $e \in A$ vérifiant $e^2 = e$).
   b. Réciproquement, supposons que pour tout $a \in A$ il existe $e \in A$ tel que $(a) = (e)$ et $e^2 = e$.
   Montrer que A est régulier.
(8) a. Soient p un nombre premier et $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   Montrer que $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ est régulier si et seulement si $\nu = 1$.
   b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit régulier.

Exercice 4.

On considère l'anneau $A \coloneqq \mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right] = \left\{a + ib\sqrt{5} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ muni de l'application $N \ : \ \mathbb{Z}\left[i\sqrt{5}\right] \to \mathbb{N}$ définie par $N(z) = |z|^2$.

(1) a. Montrer que $z \in A^*$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   b. Montrer que $A^* = \{\pm 1\}$.

(2) Résoudre l'équation $N(z) = 9$ d'inconnue $z \in A$.

(3) a. Montrer que les éléments $2 + i\sqrt{5}$, $2 - i\sqrt{5}$ et 3 sont irréductibles et deux à deux non associés.
   b. En déduire deux décompositions distinctes de 9 en produit d'irréductibles.

(4) a. Montrer directement à partir de la définition que l'idéal (3) n'est pas premier.
   b. Montrer que $A/(3) \simeq \mathbb{Z}[X]/(3, X^2 + 5)$.
   c. Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(3, X^2 + 5) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
   d. En déduire une nouvelle démonstration du fait que l'idéal (3) n'est pas premier.

(5) Montrer que 9 et $3\left(2 + i\sqrt{5}\right)$ n'ont pas de pgcd dans A.
   Indication : on pourra commencer par lister les diviseurs communs.

(6) On considère l'idéal $I \coloneqq \left(3, 1 + i\sqrt{5}\right)$.
   a. Montrer que $I = \left\{a + ib\sqrt{5} \ : \ a \equiv b \mod 3\right\}$.
   b. En déduire que $I \neq A$.
   c. Montrer que I n'est pas principal.

(7) Justifier de quatre façons distinctes que A n'est pas un anneau principal.

(8) A est-il un anneau euclidien pour N ? Pour un autre stathme ?

Solution de l'exercice 1.

(1) a. On dit qu'un anneau A est à division si $A^* = A \setminus \{0\}$.
b. On dit que a et b sont associés si $a|b$ et $b|a$.

(2) L'algorithme d'Euclide, avec $N(z) \coloneqq |z|^2$ donne

$$6+8i = (1+5i)(2-i) + (-1-i) \qquad \text{où } N(-1-i) = 2 < 26 = N(1+5i)$$
$$1+5i = (-1-i)(-3-2i) + 0$$

Donc un pgcd de $1+5i$ et $6+8i$ est $-1-i$.
De plus $-1-i = (6+8i)\times 1 + (1+5i)\times(-2+i)$.

(3) a. Puisque l'idéal (0) est premier, on a que $A \simeq A/(0)$ est intègre.
b. Soit $x \in A \setminus \{0\}$. Puisque (x^2) est premier et que $x^2 \in (x^2)$, on obtient que $x \in (x^2)$.
Ainsi, il existe $a \in A$ tel que $x = ax^2$. Puisque A est intègre et $x \neq 0$, on obtient $1 = ax$.
Donc x est inversible.

Solution de l'exercice 2.

(1) Montrons que $(A, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ est un anneau commutatif non trivial.

- $(A, \oplus, \mathbb{0})$ est un groupe commutatif (c'est le produit de groupes usuel).
- $\cdot$ est associative : soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ alors
$(a,b)\odot((c,d)\odot(e,f)) = (a,b)\odot(ce-df, cf+de) = (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$
et
$((a,b)\odot(c,d))\odot(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\odot(e,f) = (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$.
Donc $(a,b)\odot((c,d)\odot(e,f)) = ((a,b)\odot(c,d))\odot(e,f)$.
- Montrons que $\mathbb{1}$ est le neutre de $\odot$: soit $(a,b) \in A$ alors $(a,b)\odot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$ et $(1,0)\cdot(a,b) = (1\cdot a - 0\cdot b, 1\cdot b + 0\cdot a) = (a,b)$.
- $\odot$ est commutative : soient $(a,b),(c,d) \in A$ alors

$$(a,b)\odot(c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, da+cb) = (c,d)\odot(a,b).$$

- $\odot$ est distributive par rapport à $\oplus$: soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ alors

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)\oplus(e,f)) &= (a,b)\cdot(c+e, d+f)\\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be)\\ &= (ac-bd, ad+bc)\oplus(ae-bf, af+be)\\ &= ((a,b)\odot(c,d))\oplus((a,b)\odot(e,f)).\end{aligned}$$

- $(A, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ est non trivial puisque $\mathbb{1} \neq \mathbb{0}$.

Remarque : on aurait aussi pu remarquer que $\varphi : A \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[i]$ défini par $\varphi(a,b) = a + ib$ induit un isomorphisme $A \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[i]$.

(2) a. Soit $(a,b) \in A \setminus \{\mathbb{0}\}$.
Puisque $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ et $2^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que $(a,b) \neq (0,0)$, on a $a^2 + b^2 \in \{1,2\}$.
Comme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un corps, il existe $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que $(a^2+b^2)x = 1$.
b. Puisque A est non trivial et commutatif, il suffit de montrer que tout élément non nul admet un inverse. Soit $(a,b) \in A\setminus\{\mathbb{0}\}$. D'après la question précédente, il existe $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que $(a^2+b^2)x = 1$.
On a alors $(a,b)\cdot(ax,-bx) = (a^2x+b^2x, -abx+bax) = (1,0) = \mathbb{1}$. Donc (a,b) est inversible dans A.

(3)
- $\mathbb{1} \coloneqq (1,0) \in B$.
- Soient $(a,0),(c,0) \in B$ alors $(a,0)\ominus(c,0) = (a-c,0) \in B$ et $(a,0)\odot(c,0) = (ac,0) \in B$.
- Soit $(a,0) \in B \setminus \{\mathbb{0}\}$ alors $a \neq 0$. Puisque $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un corps, il existe $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tel que $ax = 1$. Puis $(x,0) \in B$ et $(a,0)\odot(x,0) = (ax,0) = (1,0) = \mathbb{1}$.

Donc B est un sous-corps de A.

Solution de l'exercice 3.

(1) a. Montrons qu'un anneau à division est régulier. Soient A un anneau à division et $a \in A$.
Si $a = 0$ alors $a \cdot 1 \cdot a = a$. Donc $u = 1$ convient.
Si $a \neq 0$ alors $a \cdot a^{-1} \cdot a = a$. Donc $u = a^{-1}$ convient.

b. Supposons par l'absurde que $\mathbb{Z}$ soit régulier. Alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $2u2 = 2$, et ainsi $2u = 1$ d'où une contradiction. Donc $\mathbb{Z}$ n'est pas régulier.

(2) Supposons que A soit régulier. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Puisque A est régulier, il existe $u \in A$ tel que $xux = x$ d'où $y = f(x) = f(xux) = f(x)f(u)f(x) = yf(u)y$.
Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est régulier.

(3) Supposons que A et B soient réguliers. Soit $(a, b) \in A \times B$.
Puisque A (resp. B) est régulier, il existe u (resp. v) tel que $aua = a$ (resp. $bvb = b$).
Alors $(a, b) \cdot (u, v) \cdot (a, b) = (aua, bvb) = (a, b)$. Donc $A \times B$ est régulier.
Réciproquement, supposons que $A \times B$ soit régulier. Alors $A = \mathrm{pr}_A(A \times B)$ et $B = \mathrm{pr}_B(A \times B)$ sont réguliers d'après la question précédente.

(4) a. Soit $x \in A$ alors $xau = axu = auaxu = auxau = uxaua = uxa = aux$. Donc $au \in C(A)$.

b. Soit $a \in C(A)$. Puisque A est régulier, il existe $u \in A$ tel que $aua = a$.
Posons $v \coloneqq uau$ alors $ava = auaua = aua = a$.
Il reste à montrer que $v \in C(A)$. Soit $x \in A$ alors

$$\begin{aligned} vx = uaux &= uxau \text{ car } au \in C(A) \\ &= auxu \text{ car } a \in C(A) \\ &= xauu \text{ car } au \in C(A) \\ &= xuau \text{ car } a \in C(A) \\ &= xv \end{aligned}$$

Donc $v \in C(A)$. Ainsi $C(A)$ est régulier.

(5) Soit A un anneau intègre et régulier. Soit $a \in A \setminus \{0\}$.
Puisque A est régulier, il existe $u \in A$ tel que $a = aua$. Puisque A est intègre et $a \neq 0$, on obtient $au = 1$.
Donc $a \in A^*$. Ainsi A est un anneau non trivial et commutatif dont tout élément non nul admet un inverse, c'est donc un corps.

(6) Soit A un anneau commutatif et régulier. Soit $a \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant $a^n = 0$.
Puisque A est régulier, il existe $u \in A$ tel que $a = aua$.
Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que $a^{k+1}u^k = a$.
Si $k = 1$ alors $a^2u = aua = a$.
Supposons la propriété vraie pour un certain $k \geq 1$ alors $a^{k+2}u^{k+1} = a^{k+1}u^kau = aua = a$.
Donc $a = a^{n+1}u^n = a^nau^n = 0$. Réciproquement, 0 est nilpotent puisque $0^1 = 0$.

(7) a. Soit A un anneau commutatif et régulier.
Soit I un idéal principal de A. Alors il existe $a \in A$ tel que $I = (a)$.
Puisque A est régulier, il existe $u \in A$ tel que $a = aua$. Posons $e \coloneqq au$ alors $e^2 = auau = au = e$.
Montrons que $I = (e)$.
On a $e = au \in (a)$ d'où $(e) \subset (a) = I$.
On a $a = aua = ea \in (e)$ d'où $I = (a) \subset (e)$.
Ainsi $I = (e)$.

b. Supposons que pour tout $a \in A$ il existe $e \in A$ tel que $(a) = (e)$ et $e^2 = e$.
Soit $a \in A$ alors il existe un idempotent $e \in A$ tel que $(a) = (e)$.
Par conséquent, il existe $x \in A$ tel que $a = ex$ et $y \in A$ tel que $e = ay$. Ainsi $aya = ea = eex = ex = a$.
Donc A est régulier

(8) a. Si $\nu = 1$ alors $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ est un corps et est donc régulier d'après la question (1).a.
Si $\nu \geq 2$ alors p est un nilpotent non nul de $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ qui n'est donc pas régulier d'après (6).

b. On écrit $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\nu_k}$ où les p_k sont des premiers deux à deux distincts et $\nu_k \geq 1$.
D'après le théorème des restes chinois, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod_{k=1}^{r} \mathbb{Z}/p_k^{\nu_k}\mathbb{Z}$.
D'après la question (3), $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est régulier si et seulement si $\mathbb{Z}/p_k^{\nu_k}\mathbb{Z}$ est régulier pour tout k.
On déduit de la question précédente que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est régulier si et seulement si $\nu_k = 1$ pour tout k.

Solution de l'exercice 4.

(1) a. Soit $z \in A^*$ alors il existe $w \in A$ tel que $zw = 1$ d'où $1 = N(1) = N(zw) = N(z)N(w)$.
Puisque $N(z), N(w) \in \mathbb{N}$, on a forcément $N(z) = 1$.
Réciproquement, soit $z \in A$ tel que $N(z) = 1$ alors $z\overline{z} = N(z) = 1$ avec $\overline{z} \in A$. Donc $z \in A^*$.

b. Soit $z \in A^*$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib\sqrt{5}$. On a $1 = N(z) = a^2 + 5b^2$.
Si $b \neq 0$ alors $1 = N(z) \geq 5$ d'où une contradiction. Ainsi $b = 0$ et $a^2 = 1$, donc $z = \pm 1$.
Réciproquement, si $z = \pm 1$ alors $z^2 = 1$ donc $z \in A^*$.

(2) Soit $z \in A$ tel que $N(z) = 9$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib\sqrt{5}$. On a $9 = N(z) = a^2 + 5b^2$.

- Si $b = 0$ alors $a^2 = 9$ et donc $z = \pm 3$.
- Si $b = \pm 1$ alors $a^2 = 4$ et donc $z = \pm 2 \pm i\sqrt{5}$.
- Si $|b| \geq 2$ alors $N(z) \geq 20$ d'où une contradiction.

Ainsi $z \in \left\{\pm 3,\ \pm 2 \pm i\sqrt{5}\right\}$. Réciproquement $N(\pm 3) = 9$ et $N(\pm 2 \pm i\sqrt{5}) = 9$.

Donc $\{z \in A \ :\ N(z) = 9\} = \left\{\pm 3,\ \pm 2 \pm i\sqrt{5}\right\}$.

(3) a. Soit $z \in \left\{3,\ 2 \pm i\sqrt{5}\right\}$. Alors $z \neq 0$ et $z \notin A^*$ puisque $N(z) = 9 \neq 1$.
Soient $x, y \in A$ tels que $z = xy$ alors $9 = N(z) = N(xy) = N(x)N(y)$ avec $N(x), N(y) \in \mathbb{N}$.

- Premier cas : $N(x) = 9$ et $N(y) = 1$ alors $y \in A^*$.
- Deuxième cas : $N(x) = N(y) = 3$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + ib\sqrt{5}$.
  Si $b = 0$ alors $a^2 = 3$, d'où une contradiction.
  Si $b \neq 0$ alors $3 = N(x) = a^2 + 5b^2 \geq 5$, d'où une contradiction.
- Troisième cas : $N(x) = 1$ et $N(y) = 9$ alors $x \in A^*$.

Donc z est irréductible.
Puisque A est intègre, deux éléments sont associés s'ils sont égaux à un facteur inversible près.
Puisque $A^* = \{\pm 1\}$, on vérifie aisément que $2 + i\sqrt{5}$, $2 - i\sqrt{5}$ et 3 sont deux à deux non associés.

b. On a $9 = 3^2$ et $9 = \left(2 + i\sqrt{5}\right)\left(2 - i\sqrt{5}\right)$ où $2 + i\sqrt{5}, 2 - i\sqrt{5}$ et 3 sont irréductibles et deux à deux non associés.

(4) a. On a $\left(2 + i\sqrt{5}\right)\left(2 - i\sqrt{5}\right) = 9 = 3^2 \in (3)$.
Supposons par l'absurde que $2 \pm i\sqrt{5} \in (3)$ alors il existe $u \in A$ tel que $2 \pm i\sqrt{5} = 3u$.
Puisque $2 \pm i\sqrt{5}$ est irréductible et que $3 \notin A^*$, on a $u \in A^* = \{\pm 1\}$ et ainsi $2 \pm i\sqrt{5} = \pm 3$, d'où une contradiction. Donc (3) n'est pas un idéal premier de A.

b. Considérons $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to A/(3)$ défini par $\varphi(P) := \overline{P\left(i\sqrt{5}\right)}$. Alors φ est un morphisme d'anneaux comme composition du morphisme d'évaluation en $i\sqrt{5}$ et de la projection canonique $A \to A/(3)$.
Soit $\overline{a + ib\sqrt{5}} \in A/(3)$ alors $\varphi(a + bX) = \overline{a + ib\sqrt{5}}$. Donc φ est surjectif.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Puisque le coefficient dominant de $X^2 + 5$ est $1 \in \mathbb{Z}^*$, par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $P = (X^2 + 5)Q + aX + b$.
On a $\overline{0} = \varphi(P) = \overline{ai\sqrt{5} + b}$ donc il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tel que $ai\sqrt{5} + b = 3\left(ci\sqrt{5} + d\right)$ d'où $a = 3c$ et

$b = 3d$. Ainsi $P = (X^2+5)Q + 3(cX+d) \in (X^2+5, 3)$.
Réciproquement, si $P \in (X^2+5, 3)$ alors il existe $R, S \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P = (X^2+5)R + 3S$ et alors $\varphi(P) = \overline{0 + 3S\left(i\sqrt{5}\right)} = \overline{0}$, donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = (X^2+5, 3)$.
On déduit du premier théorème d'isomorphisme que $\mathbb{Z}[X]/(X^2+5, 3) \simeq A/(3)$.

c. Considérons $\psi : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ défini par $\psi(P) = (P(1), P(-1))$ alors ψ est un morphisme d'anneaux puisque chaque composante est un morphisme d'évaluation.
Soient $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ alors $\psi((-\alpha+\beta)X - \alpha - \beta) = (\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Donc ψ est surjectif.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Puisque le coefficient dominant de X^2+5 est $1 \in \mathbb{Z}^*$, par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $P = (X^2+5)Q + aX + b$.
On a $(\overline{0}, \overline{0}) = \psi(P) = \left(\overline{a+b}, \overline{-a+b}\right)$ d'où $3|a+b$ et $3|a-b$. Donc $3|2a = (a+b)+(a-b)$ et, d'après le lemme de Gauss, $3|a$. De même $3|2b = (a+b)-(a-b)$ d'où $3|b$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 3\alpha$ et $b = 3\beta$. Donc $P = (X^2+5)Q + 3(\alpha X + \beta) \in (X^2+5, 3)$.
Réciproquement, si $P \in (X^2+5, 3)$ alors il existe $R, S \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P = (X^2+5)R + 3S$ et alors $\psi(P) = \left(\overline{6R(1) + 3S(1)}, \overline{6R(-1) + 3S(-1)}\right) = (\overline{0}, \overline{0})$. Donc $P \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
On déduit du premier théorème d'isomorphisme que $\mathbb{Z}[X]/(X^2+5, 3) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

d. D'après les questions précédentes, $A/(3) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
Or $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ n'est pas intègre puisque $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$.
Par conséquent (3) n'est pas un idéal premier de A.

(5) Soient $z, w \in A$ tels que $9 = zw$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib\sqrt{5}$ et $w = c + id\sqrt{5}$. Comme $81 = N(9) = N(zw) = N(z)N(w)$, on distingue les cas suivants :

- Si $N(z) = 81$ alors $N(w) = 1$ donc $z = \pm 9$.
- Si $N(z) = 27$ alors $3 = N(w) = c^2 + 5d^2$ d'où une contradiction (si $d = 0$ alors $c^2 = 3$ et sinon $3 = c^2 + 5d^2 \geq 5$).
- Si $N(z) = 9$ alors on a vu à la question (2) que $z = \pm 3$ ou $z = \pm 2 \pm i\sqrt{5}$.
- Si $N(z) = 3$ alors $3 = N(z) = a^2 + 5b^2$ d'où une contradiction.
- Si $N(z) = 1$ alors $z = \pm 1$.

Remarquons que ± 9 ne divise pas $3\left(2 + i\sqrt{5}\right)$: sinon, on aurait $3|2 + i\sqrt{5}$, d'où une contradiction avec la réponse en (4).a.
On vérifie à la main que $\pm\left(2 - i\sqrt{5}\right)$ ne divise pas $3\left(2 + i\sqrt{5}\right)$.
Comme $9 = 3^2 = (2 - i\sqrt{5})(2 + i\sqrt{5})$, les diviseurs communs à 9 et $3\left(2 + i\sqrt{5}\right)$ sont :
± 1, ± 3 et $\pm\left(2 + i\sqrt{5}\right)$.

On a déjà vu en (4).a. que $3 \nmid 2 + i\sqrt{5}$. On montre de façon similaire que $2 + i\sqrt{5} \nmid 3$.
Donc 9 et $3\left(2 + i\sqrt{5}\right)$ n'ont pas de pgcd.

(6) a. Soit $z \in I$ alors il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $z = 3(a + ib\sqrt{5}) + (1 + i\sqrt{5})(c + id\sqrt{5})$.
Ainsi $z = 3a + c - 5d + (3b + c + d)i\sqrt{5}$ avec $3a + c - 5d \equiv 3b + c + d \mod 3$.
Réciproquement, soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b \mod 3$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + 3k$ d'où $a + ib\sqrt{5} = 3k + b\left(1 + i\sqrt{5}\right)$.
Donc $I = \left\{a + ib\sqrt{5} \ : \ a \equiv b \mod 3\right\}$.

b. $1 \notin I$ puisque $1 \not\equiv 0 \mod 3$, ainsi $I \neq A$.

c. Supposons qu'il existe $w \in A$ tel que $I = (w)$. Alors on a $3 \in \left(3, 1 + i\sqrt{5}\right) = (w)$ donc il existe $z \in A$ tel que $3 = zw$ d'où $9 = N(3) = N(z)N(w)$.
   - Si $N(w) = 1$ alors $w \in A^*$ et $I = A$, d'où une contradiction avec la question précédente.
   - Si $N(w) = 3$ alors, en écrivant $w = a + ib\sqrt{5}$, on a $3 = a^2 + 5b^2$. Si $b = 0$ alors $3 = a^2$ d'où une contradiction. Si $b \neq 0$ alors $3 = a^2 + 5b^2 \geq 5$ d'où une contradiction.
   - Si $N(w) = 9$ alors $N(z) = 1$ et $z \in A^* = \{\pm 1\}$ ainsi $w = \pm 3$. Alors $1 + i\sqrt{5} \in I = (w) = (3)$, et il existe $t \in A$ tel que $1 + i\sqrt{5} = 3t$. Par conséquent $6 = N(1 + i\sqrt{5}) = 9N(t)$, d'où une contradiction.

   Donc I n'est pas principal.

(7)
- Un anneau principal est factoriel, or A ne l'est pas d'après la question (3).b.
- Dans un anneau factoriel (en particulier principal), un idéal engendré par un irréductible est premier, or 3 est irréductible mais (3) n'est pas premier d'après les questions (3).a et (4).
- Deux éléments d'un anneau principal ont toujours un pgcd, or 9 et $3\left(2 + i\sqrt{5}\right)$ n'ont pas de pgcd dans A d'après la question (5).
- L'idéal I de la question (6) n'est pas principal.

(8) Un anneau euclidien est principal, donc A n'admet pas de stathme le rendant euclidien.