Université d'Angers – 2025/2026

Analyse fonctionnelle

CC du 05/05/2026.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.
On considère $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $\mathcal{O} := \{]a,+\infty[\ : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer l'adhérence de $\{42\}$ pour la topologie $\mathcal{O}$.
(3) Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est connexe.
(4) Montrer qu'une partie non vide de $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est quasi-compacte si et seulement si elle admet un minimum.
(5) a. Montrer que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est continue alors elle est croissante.
 b. La réciproque est-elle vraie ?
(6) Soient $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
 Montrer que $(x_n)_n$ converge vers ℓ pour $\mathcal{O}$ si et seulement si $\liminf_{n\to+\infty} x_n \geq \ell$ (pour la topologie usuelle).
(7) Justifier que $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ n'est pas séparé de trois façons différentes.

Exercice 2.
On considère l'ensemble des suites réelles à support fini

$$c_{00} := \left\{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies x_n = 0\right\}.$$

(1) Justifier que c_{00} est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty : c_{00} \to \mathbb{R}$ défini par $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est une norme sur c_{00}. On considère c_{00} muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans la suite.
(2) On considère $f : c_{00} \times c_{00} \to \mathbb{R}$ défini par $f((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$.
 a. Justifier que f est bien définie et est une forme bilinéaire symétrique.
 b. Soient $u, v \in c_{00}$. Montrer que $f_u : y \mapsto f(u,y)$ et $f_v : x \mapsto f(x,v)$ sont des formes linéaires continues sur c_{00}.
 c. Est-ce que f est continue ?
(3) On considère $T : c_{00} \to c_{00}$ défini par $T((x_n)_n) := \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_n$.
 a. Montrer que T est bien définie, linéaire, continue et bijective.
 b. Montrer que T^{-1} n'est pas continue.
 c. Rappeler l'énoncé du théorème d'isomorphisme de Banach et conclure.

Exercice 3.
On considère $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, muni de la norme euclidienne.
Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un *arc rectifiable*, i.e. il existe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ une fonction lipschitzienne telle que $\mathrm{Im}(\gamma) = C$.

(1) Montrer que C est compact.
(2) Soit $(f_n)_n \in C^0([0,1], \mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$.
 Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f_n) = C$ alors $\mathrm{Im}(f) = C$.
 Indication : étant donné $c \in C$, on pourra construire une suite $(t_n)_n$ de $[0,1]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n(t_n) = c$.
(3) On définit la *longueur de C* par

$$\ell(C) := \inf\left\{K \geq 0 \ : \ \exists f : [0,1] \to \mathbb{R}^d \ K\text{-lipschitzienne telle que } \mathrm{Im}(f) = C\right\}.$$

 a. Montrer qu'il existe $(f_n)_n \in C^0([0,1], \mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et $(K_n)_n \in [0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} K_n = \ell(C)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est K_n-lipschitzienne.
 b. Montrer que $\left\{f_n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ est relativement compacte dans $C^0([0,1], \mathbb{R}^d)$.
 c. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément vers une fonction $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{Im}(f) = C$ et f est $\ell(C)$-lipschitzienne.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

(1) Soient G et L deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $G+L$ est fermé. On considère $G \times L$ muni de la norme $\|(x,y)\|_{G\times L} \coloneqq \|x\| + \|y\|$ et $G+L$ muni de la norme induite par $\|\cdot\|$.

   a. Vérifier que $\|\cdot\|_{G\times L}$ est bien une norme et que $(G\times L, \|\cdot\|_{G\times L})$ est un espace de Banach.

   b. Montrer que $T : G \times L \to G + L$ défini par $T(x,y) \coloneqq x + y$ est une application linéaire, continue et surjective.

   c. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall z \in G+L,\ \exists (x,y) \in G\times L,\ z = x+y \text{ et } \|x\| \leq \lambda \|z\| \text{ et } \|y\| \leq \lambda\|z\|.$$

(2) On considère G et L comme dans la question précédente et on veut montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ d(x, G\cap L) \leq \mu\left(d(x,G) + d(x,L)\right),$$

où $d(x,F) \coloneqq \inf_{y\in F} d(x,y)$ pour $F \subset E$.

   a. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in G$ et $b \in L$ tels que

$$\|x-a\| \leq d(x,G) + \varepsilon \quad \text{ et } \quad \|x-b\| \leq d(x,L) + \varepsilon.$$

   b. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, $a' \in G$ et $b' \in L$ tels que $\|a'\| \leq \lambda\|a-b\|$, $\|b'\| \leq \lambda\|a-b\|$ et $a - a' \in G\cap L$.

   c. En déduire qu'il existe $C_1, C_2, C_3 > 0$ tels que

$$d(x, G\cap L) \leq C_1 d(x,G) + C_2 d(x,L) + C_3\varepsilon.$$

   d. Conclure.

Solution de l'exercice 1.

(1)
- $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{O}$ par définition.
- Soit $(O_i)_{i\in I} \in \mathcal{O}^I$.
  Si $I = \varnothing$ ou si tous les O_i sont vides alors on a $\bigcup_{i\in I} O_i = \varnothing \in \mathcal{O}$.
  S'il existe $i \in I$ tel que $O_i = \mathbb{R}$ alors $\bigcup_{i\in I} O_i = \mathbb{R} \in \mathcal{O}$.
  On peut donc supposer que $I \neq \varnothing$ et que pour tout $i \in I$, il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que $O_i =]a_i, +\infty[$.
  - *Premier cas :* $\{a_i \ : \ i \in I\}$ n'est pas minoré.
    Soit $x \in \mathbb{R}$ alors il existe $j \in I$ tel que $a_j < x$ d'où $x \in]a_j, +\infty[= O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
    Donc $\bigcup_{i\in I} O_i = \mathbb{R} \in \mathcal{O}$.
  - *Second cas :* $\{a_i \ : \ i \in I\}$ est minoré. Posons $a \coloneqq \inf\{a_i \ : \ i \in I\}$.
    Soit $x > a$ alors il existe $j \in I$ tel que $x > a_j$ d'où $x \in]a_j, +\infty[= O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
    Donc $]a, +\infty[\subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
    Si $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$ alors il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i =]a_i, +\infty[$ d'où $x > a_i \geq a$.
    Donc $\bigcup_{i\in I} O_i =]a, +\infty[\in \mathcal{O}$.
- Soient $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$.
  - Si $O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$ alors $O_1 \cap O_2 = \varnothing \in \mathcal{O}$.
  - Si $O_1 = \mathbb{R}$ (resp. $O_2 = \mathbb{R}$) alors $O_1 \cap O_2 = O_2 \in \mathcal{O}$ (resp. $O_1 \cap O_2 = O_1 \in \mathcal{O}$).
  - On peut donc supposer qu'il existe $O_i =]a_i, +\infty[$ avec $a_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2$.
    Alors $O_1 \cap O_2 =]\max(a_1, a_2), +\infty[\in \mathcal{O}$.

Donc $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrons que $\overline{\{42\}} =]-\infty, 42]$.

- $\mathbb{R} \setminus]-\infty, 42] =]42, +\infty[\in \mathcal{O}$ donc $]-\infty, 42]$ est un fermé contenant 42.
- Soit F un fermé contenant 42.
  Si $F = \mathbb{R}$ alors $]-\infty, 42] \subset F$.
  Sinon, $F^c \neq \varnothing$ et $F^c \neq \mathbb{R}$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $F = \mathbb{R} \setminus]a, +\infty[=]-\infty, a]$.
  Puisque $42 \in F$, on a $a \geq 42$ d'où $]-\infty, 42] \subset]-\infty, a] = F$.

Donc $]-\infty, 42]$ est le plus petit fermé de $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ contenant $\{42\}$, i.e. $\overline{\{42\}} =]-\infty, 42]$.

(3) Supposons par l'absurde que $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ n'est pas connexe.
Alors il existe $U, V \in \mathcal{O} \setminus \{\varnothing\}$ tels que $U \cap V = \varnothing$ et $U \sqcup V = \mathbb{R}$. D'où $U = \mathbb{R} \setminus V \neq \mathbb{R}$ et $V = \mathbb{R} \setminus U \neq \mathbb{R}$.
Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $U =]a, +\infty[$ et $V =]b, +\infty[$.
Posons $c \coloneqq \max(a, b) + 1$ alors $c \in U \cap V$ d'où une contradiction.

(4) Soit K une partie non vide quasi-compacte de $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$. Alors $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, +\infty[$.
Par quasi-compacité, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{n=0}^{N}]-n, +\infty[=]-N, +\infty[$, donc K est minorée.
Ainsi $m \coloneqq \inf K$ existe. Supposons par l'absurde que $m \notin K$ alors $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]m + 2^{-n}, +\infty[$.
Par quasi-compacité, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{n=0}^{M}]m + 2^{-n}, +\infty[=]m + 2^{-M}, +\infty[$.
Donc $m + 2^{-}M$ est un minorant de K plus grand que m, d'où une contradiction. Ainsi $m = \min(K)$.

Réciproquement, soit K une partie de $\mathbb{R}$ admettant un minimum $m \coloneqq \min K$.
Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
Donc il existe $i \in I$ tel que $m \in O_i$. Soit $O_i = \mathbb{R}$ ou $O_i =]a, +\infty[$ avec $m > a$, dans les deux cas $K \subset O_i$.
Donc K est quasi-compacte.

(5) a. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ une fonction continue. Supposons par l'absurde que f ne soit pas croissante alors il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$.
Par continuité, $f^{-1}(]f(y), +\infty[)$ est un ouvert qui de plus contient x puisque $f(x) \in]f(y), +\infty[$ mais qui ne contient pas y.
Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(]f(y), +\infty[) =]a, +\infty[$, et ainsi $y \leq a < x$.
D'où une contradiction.

b. La fonction $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ est croissante mais pas continue car $(\mathbf{1}_{[0,+\infty[})^{-1}(]0,+\infty[) = [0,+\infty[\notin \mathscr{O}$.
Donc la réciproque est fausse.

(6) Supposons que $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Soit $k \in \mathbb{N}$ alors $]\ell - 2^{-k}, +\infty[$ est un voisinage ouvert de ℓ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies x_n \in]\ell - 2^{-k}, +\infty[$.
Donc $\liminf_{n\to+\infty} x_n \geq \ell - 2^{-k}$. D'où $\liminf_{n\to+\infty} x_n \geq \ell$.

Réciproquement, supposons que $\liminf_{n\to+\infty} x_n \geq \ell$. Soit V un voisinage ouvert contenant ℓ.
Si $V = \mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in V$. On suppose donc que $V \neq \mathbb{R}$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ell \in]a, +\infty[\subset V$.
Puisque $a < \ell$, par hypothèse il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\inf_{k\geq N} x_k > a$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ alors $x_n \geq \inf_{k\geq N} x_k > a$ d'où $x_n \in]a, +\infty[$.

(7) (i) Soit U un voisinage de 0 et V un voisinage de 1.
Si $U = \mathbb{R}$ alors $1 \in U \cap V$ donc $U \cap V \neq \varnothing$.
Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in]a, +\infty[\subset U$ mais alors $a < 0 < 1$ d'où $1 \in]a, +\infty[\subset U$.
Donc $1 \in U \cap V$ et $U \cap V \neq \varnothing$.
Ainsi $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ n'est pas un espace topologique séparé.

(ii) $\{42\}$ est une partie quasi-compacte non fermée, or un quasi-compact d'un espace séparé est fermé.

(iii) La suite constante égale à 0 converge vers tout élément $\ell \leq 0$, donc il n'y a pas unicité de la limite d'une suite.

Solution de l'exercice 2.

(1) Montrons que c_{00} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On a $0 \in c_{00}$.
- Soient $(x_n)_n, (y_n)_n \in c_{00}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $N, M \in \mathbb{N}$ tels que $x_n = 0$ pour $n \geq N$ et $y_n = 0$ pour $n \geq M$. Alors, pour $n \geq \max(N, M)$, on a $x_n + \lambda y_n = 0$. D'où $(x_n + \lambda y_n)_n \in c_{00}$

Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur c_{00}.

- Soit $(x_n)_n \in c_{00}$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour $n \geq N$. Donc $\|(x_n)_n\|_\infty = \max(|x_0|, \ldots, |x_N|)$ est bien défini.
- Soit $(x_n)_n \in c_{00}$ tel que $\|(x_n)_n\|_\infty = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x_n| \leq \|(x_n)_n\|_\infty = 0$ d'où $x_n = 0$. Ainsi $(x_n)_n = 0$.
- Soient $(x_n)_n \in c_{00}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\|(\lambda x_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\lambda| \|(x_n)_n\|_\infty$.
- Soient $(x_n)_n, (y_n)_n \in c_{00}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| = \|(x_n)_n\|_\infty + \|(y_n)_n\|_\infty$.
D'où $\|(x_n)_n + (y_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \|(x_n)_n\|_\infty + \|(y_n)_n\|_\infty$.

(2) a. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n \in c_{00}$ alors il existe $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $x_n = 0$ pour $n \geq N$, $y_n = 0$ pour $n \geq M$.
Donc $f((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{\min(M,N)-1} x_n y_n$ est bien défini.
De plus $f((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n = f((y_n)_n, (x_n)_n)$ donc f est symétrique.
Soient $(z_n)_n \in c_{00}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$f((x_n)_n + \lambda(y_n)_n, (z_n)_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n + \lambda y_n) z_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n z_n + \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n z_n = f((x_n)_n, (z_n)_n) + \lambda f((y_n)_n, (z_n)_n)$$

donc f est bien une forme bilinéaire symétrique.

b. Soit $y := (y_n)_n \in c_{00}$ alors

$$|f_u(y)| = \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n y_n \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n y_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \cdot |y_n| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \right) \|y\|_\infty.$$

Donc l'application linéaire f_u est continue. On montre de même que f_v est continue.

c. Supposons par l'absurde que f soit continue.
Alors il existe $C > 0$ tel que $\forall x, y \in c_{00}$, $|f(x, y)| \leq C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > C$. Puis

$$N + 1 = |f(\mathbf{1}_{n\leq N}, \mathbf{1}_{n\leq N})| \leq C\|\mathbf{1}_{n\leq N}\|_\infty \|\mathbf{1}_{n\leq N}\|_\infty = C.$$

D'où une contradiction.

(3) a. Soit $(x_n)_n \in c_{00}$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour $n \geq N$. En particulier $\frac{x_n}{n+1} = 0$ pour $n \geq N$. Ainsi $\left(\frac{x_n}{n+1}\right)_n \in c_{00}$ et T est bien définie.
Soient $(y_n)_n \in c_{00}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$T\left((x_n)_n + \lambda(y_n)_n\right) = \left(\frac{x_n + \lambda y_n}{n+1}\right)_n = \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_n + \lambda\left(\frac{y_n}{n+1}\right)_n = T((x_n)_n) + T((y_n)_n),$$

donc T est linéaire.
De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{x_n}{n+1}\right| \leq |x_n| \leq \|(x_n)_n\|_\infty$ donc $\|T((x_n)_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x_n}{n+1}\right| \leq \|(x_n)_n\|_\infty$.
Donc T est continue.
On vérifie comme ci-dessus que $T^{-1} : c_{00} \to c_{00}$ défini par $T^{-1}((x_n)_n) = \big((n+1)x_n\big)_n$ est bien définie, puis $T^{-1} \circ T((x_n)_n) = (x_n)_n$ et $T \circ T^{-1}((x_n)_n) = (x_n)_n$. Donc T est bijective.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\left\|T^{-1}((\mathbf{1}_{n=k})_n)\right\|_\infty = k + 1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. Donc T^{-1} n'est pas continue.

c. Le théorème d'isomorphisme de Banach stipule qu'une application linéaire, continue et bijective entre deux espaces de Banach est un isomorphisme bicontinu.
Puisque T est une application linéaire, continue, bijective dont l'inverse n'est pas continue, on en déduit que c_{00} n'est pas complet.

Solution de l'exercice 3.

(1) Puisque $\mathbb{R}^d$ est séparé pour la topologie usuelle, on obtient que $C = \mathrm{Im}(\gamma)$ comme image continue d'un compact (γ est continue car lipschitzienne).

(2) Soit $t \in [0, 1]$ alors $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t) \in C$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \in C$ et C est fermé comme compact d'un espace séparé. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset C$. Montrons maintenant l'inclusion réciproque.
Soit $c \in C$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $t_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(t_n) = c$. Puisque $[0, 1]$ est compact d'un espace métrique, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $t \in [0, 1]$ tels que $t_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\|c - f(t_{\varphi(n)})\| = \|f_{\varphi(n)}(t_{\varphi(n)}) - f(t_{\varphi(n)})\| \leq \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty$. En passant à la limite, on obtient $\|c - f(t)\| = 0$, d'où $c = f(t) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = C$.

(3) a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\ell(C) + 2^{-n} > \ell(C) \coloneqq \inf\left\{K \geq 0 \;:\; \exists f \in \mathrm{Lip}_K([0, 1], \mathbb{R}^d),\ \mathrm{Im}(f) = C\right\}$, il existe $K_n \in \left[\ell(C), \ell(C) + 2^{-n}\right[$ et $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ une fonction K_n-lipschitzienne telle que $\mathrm{Im}(f_n) = C$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ell(C) + 2^{-n} = \ell(C)$, les suites $(K_n)_n$ et $(f_n)_n$ vérifient les conditions requises.

b. Pour $t \in [0, 1]$, on a $\overline{\left\{f_n(t) \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}} \subset C$ donc $\overline{\left\{f_n(t) \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}}$ est compact comme fermé d'un compact.
La suite $(K_n)_n$ est convergente donc bornée, ainsi il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est K-lipschitzienne. Donc $\left\{f_n, :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est une partie équicontinue de $C^0([0, 1], \mathbb{R}^d)$.
D'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, $\left\{f_n, :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est donc une partie relativement compacte de $C^0([0, 1], \mathbb{R}^d)$.

c. D'après la question précédente, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément vers une fonction $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}^d)$.
D'après la question (2), on a $\mathrm{Im}(f) = C$.
Soient $t, s \in [0, 1]$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_{\varphi(n)}(t) - f_{\varphi(n)}(s)\| \leq K_{\varphi(n)}|t - s|$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\|f(t) - f(s)\| \leq \ell(C)|t - s|$. Donc f est $\ell(C)$-lipschitzienne.

Solution de l'exercice 4.

(1) a. • Soit $(x, y) \in G \times L$ tel que $\|(x, y)\|_{G\times L} = 0$ alors $\|x\| + \|y\| = 0$ d'où $\|x\| = \|y\| = 0$ et $x = y = 0$. Ainsi $(x, y) = (0, 0)$.

• Soient $(x, y) \in G \times L$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\|\lambda(x, y)\|_{G\times L} = \|(\lambda x, \lambda y)\|_{G\times L} = \|\lambda x\| + \|\lambda y\| = |\lambda| (\|x\| + \|y\|) = |\lambda|\|(x, y)\|_{G\times L}.$$

• Soient $(x, y), (u, v) \in G \times L$ alors

$$\begin{aligned}\|(x, y) + (u, v)\|_{G\times L} = \|(x + u, y + v)\|_{G\times L} &= \|x + u\| + \|y + v\| \\ &\leq \|x\| + \|u\| + \|y\| + \|v\| \\ &= \|(x, y)\|_{G\times L} + \|(u, v)\|_{G\times L}.\end{aligned}$$

Donc $\|\cdot\|_{G\times L}$ est une norme sur $G \times L$.

Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(G \times L, \|\cdot\|_{G\times L})$.
Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| = \|(x_n, y_n)\|_{G\times L}$ donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$. Ainsi il existe $x \in E$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ pour $\|\cdot\|$. Puisque G est fermé, on a $x \in G$. De même, il existe $y \in L$ tel que $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ pour $\|\cdot\|$.
Ainsi $\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{G\times L} = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $((x_n, y_n))_n$ converge vers (x, y) pour $\|\cdot\|_{G\times L}$. On a bien montré que $(G \times L, \|\cdot\|_{G\times L})$ est un espace de Banach.

b. Soient $(x, y), (u, v) \in G \times L$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$T((x, y) + \lambda(u, v)) = T(x + \lambda u, y + \lambda v) = x + \lambda u + y + \lambda v = T(x, y) + \lambda T(u, v).$$

Donc T est linéaire.
Soit $z \in G + L$ alors il existe $x \in G$ et $y \in L$ tels que $z = x + y$. Ainsi $z = x + y = T(x, y)$. Donc T est surjective.
Soit $(x, y) \in G \times L$ alors $\|T(x, y)\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_{G\times L}$ donc T est continue.

c. On sait que $G \times L$ est un espace de Banach d'après la question (1).a et que $G + L$ est un espace de Banach comme sous-espace vectoriel fermé d'un Banach. Puisque T est linéaire, continue et surjective, on déduit du théorème de Banach–Schauder qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \in G + L,\ \|z\| < r \implies \exists (x, y) \in G \times L,\ z = T(x, y) \text{ et } \|(x, y)\|_{G\times L} < 1.$$

Posons $\lambda := \frac{2}{r}$. Soit $z \in (G + L) \setminus \{0\}$ alors il existe $(x, y) \in G \times L$ tel que $\frac{r}{2} \cdot \frac{z}{\|z\|} = T(x, y) = x + y$ et $\|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_{G\times L} < 1$. Posons $x' := \frac{2\|z\|}{r} x$ et $y' := \frac{2\|z\|}{r} y$ alors $x' + y' = \frac{2\|z\|}{r}(x + y) = z$.
De plus $\|x'\| = \frac{2\|z\|}{r}\|x\| \leq \lambda\|z\| (\|x\| + \|y\|) \leq \lambda\|z\|$ et $\|y'\| \leq \lambda\|z\|$ de la même façon.

(2) a. Puisque $d(x, G) + \varepsilon > d(x, G) = \inf\{\|x - a\| \ :\ a \in G\}$, il existe $a \in G$ tel que $\|x - a\| < d(x, G) + \varepsilon$. De même, il existe $b \in L$ tel que $\|x - b\| < d(x, L) + \varepsilon$.

b. On considère $\lambda > 0$ comme dans la question (1).c.
Alors il existe $a' \in G$ et $b' \in L$ tels que $a - b = a' + b'$, $\|a'\| \leq \lambda\|a - b\|$, et $\|b'\| \leq \lambda\|a - b\|$.
On a $a - a' \in G$ et $a - a' = b + b' \in L$ donc $a - a' \in G \cap L$.

c. En posant $C_1 := 1 + \lambda$, $C_2 := \lambda$ et $C_3 := 1 + 2\lambda$, on a

$$\begin{aligned}d(x, G \cap L) \leq \|x - (a - a')\| &\leq \|x - a\| + \|a'\| \\ &\leq \|x - a\| + \lambda\|a - b\| \\ &\leq \|x - a\| + \lambda\|a - x\| + \lambda\|b - x\| \\ &\leq d(x, G) + \varepsilon + \lambda d(x, G) + \lambda\varepsilon + \lambda d(x, L) + \lambda\varepsilon \\ &\leq (1 + \lambda)d(x, G) + \lambda d(x, L) + (1 + 2\lambda)\varepsilon \\ &= C_1 d(x, G) + C_2 d(x, L) + C_3\varepsilon.\end{aligned}$$

d. En faisant ε vers 0, on a $d(x, G \cap L) \leq C_1 d(x, G) + C_2 d(x, L) \leq \mu (d(x, G) + d(x, L))$ où $\mu := \max(C_1, C_2)$.