

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction. Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue ;
- (ii) $\forall A \subset Y, f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(A)}$;
- (iii) $\forall A \subset Y, \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$;
- (iv) $\forall A \subset Y, \partial f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\partial A)$.

Exercice 2.

On considère $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique pour la topologie cofinie, i.e.

$$\mathcal{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) : X \setminus O \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}.$$

- (1) Montrer que $(X, \mathcal{O})$ est séparé si et seulement si X est fini.
- (2) On suppose $|X| > 1$. Montrer que $(X, \mathcal{O})$ est connexe si et seulement si X est infini.
- (3) Montrer que $(X, \mathcal{O})$ est quasi-compact.
- (4) On considère une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$. On définit A comme l'ensemble des valeurs prises une infinité de fois par $(x_n)_n$, i.e.

$$A := \{a \in X : \{n \in \mathbb{N} : x_n = a\} \text{ est infini}\}.$$

- a. Montrer que si $A = \emptyset$ alors $(x_n)_n$ converge vers tous les éléments de X .
- b. Montrer que si $|A| = 1$ alors $(x_n)_n$ converge dans X vers une unique limite que l'on précisera.
- c. Montrer que si $|A| > 1$ alors $(x_n)_n$ n'a pas de limite dans X .
- (5) Soit $Y \subset X$. Montrer que la topologie induite par $\mathcal{O}$ sur Y coïncide avec la topologie cofinie sur Y .

Exercice 3.

On définit $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par $d(z, w) := |w - z|$ si z et w sont colinéaires et $d(z, w) := |z| + |w|$ sinon.

- (1) Montrer que $\forall z, w \in \mathbb{C}, |w - z| \leq d(z, w)$.
- (2) Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{C}$. On l'appelle souvent distance SNCF.
- (3) Représenter graphiquement les boules $B(0, 1)$, $B(1 + i, 1)$, $B(1 + i, \sqrt{2})$ et $B(1 + i, 2)$.
Aucune justification n'est demandée pour les dessins, mais faites bien apparaître les longueurs importantes.
- (4) a. Montrer qu'un ouvert pour la distance euclidienne $d_e(z, w) := |w - z|$ est ouvert pour d .
b. La réciproque est-elle vraie?
- (5) Déterminer l'adhérence (pour d) du demi-plan $\mathbf{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.
- (6) Déterminer l'intérieur (pour d) de l'axe des ordonnées $\mathbf{D} := \{iy : y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4.**PARTIE I : TOPOLOGIE DES ENTIERS UNIFORMÉMENT ESPACÉS**

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $S(a, b) := \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$.

On définit $\mathcal{O} := \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \forall x \in U, \exists a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, S(a, x) \subset U\}$.

- (1) Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{Z}$.
- (2) Montrer que $\mathcal{B} := \{S(a, b) : a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}\}$ est une base de $\mathcal{O}$.
- (3) Montrer que $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ est un espace topologique séparé.

PARTIE II : DÉMONSTRATION DE H. FURSTENBERG DE L'INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS

Pour les questions suivantes, on considère l'espace topologique $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ défini dans la partie précédente.

- (4) Soient $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $S(a, b)$ est une partie fermée.
- (5) Montrer qu'une partie finie et non vide de $\mathbb{Z}$ n'est pas ouverte.
- (6) On note $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
 - a. Montrer que $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \in \mathbf{P}} S(p, 0)$.
 - b. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Solution de l'exercice 1.

(i)⇒(ii) Supposons que f soit continue. Soit $A \subset Y$. Puisque $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a aussi $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset f^{-1}(A)$.

Puisque $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, on a par continuité que $f^{-1}(\overset{\circ}{A})$ est ouvert. Ainsi $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) = \widehat{f^{-1}(\overset{\circ}{A})} \subset \widehat{f^{-1}(A)}$.

(ii)⇒(iii) Supposons $\forall A \subset Y, f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \widehat{f^{-1}(A)}$.

Soit $A \subset Y$. D'après la question précédente, on a $f^{-1}(\overset{\circ}{Y \setminus A}) \subset \widehat{f^{-1}(Y \setminus A)}$.

Or $f^{-1}(\overset{\circ}{Y \setminus A}) = f^{-1}(Y \setminus \overline{A}) = X \setminus f^{-1}(\overline{A})$ et $\widehat{f^{-1}(Y \setminus A)} = \widehat{X \setminus f^{-1}(A)} = X \setminus \overline{f^{-1}(A)}$.

On a donc $X \setminus f^{-1}(\overline{A}) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(A)}$, i.e. $f^{-1}(A) \subset \overline{f^{-1}(A)}$.

(iii)⇒(iv) Supposons $\forall A \subset Y, \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

Soit $A \subset Y$. Alors

$$\begin{aligned} \partial f^{-1}(A) &= \overline{f^{-1}(A)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(A)} = \overline{f^{-1}(A)} \cap \overline{f^{-1}(Y \setminus A)} \subset f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{Y \setminus A}) \\ &= f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{Y \setminus A}) = f^{-1}(\partial A) \end{aligned}$$

(iv)⇒(i) Supposons $\forall A \subset Y, \partial f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\partial A)$.

Soit F un fermé de Y . Alors

$$\begin{aligned} \partial f^{-1}(F) &\subset f^{-1}(\partial F) \quad \text{par hypothèse} \\ &\subset f^{-1}(F) \quad \text{car } \partial F \subset F \text{ puisque } F \text{ est fermé} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(F)$ est fermé. On a bien montré que f est continue.

Solution de l'exercice 2.

(1) Supposons X est infini. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Soient V un voisinage de x et W un voisinage de y . Alors il existe $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in X$ tels que $x \in X \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \subset V$ et $y \in X \setminus \{b_1, \dots, b_s\} \subset W$. Puisque X est infini, il existe $c \in X \setminus \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s\}$. Alors $c \in V \cap W$. Donc X n'est pas séparé.

Supposons X fini. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $X \setminus \{x\}$ et $X \setminus \{y\}$ sont finis.

Donc $\{x\}$ et $\{y\}$ sont ouverts et vérifient $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ et $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. Ainsi X est séparé.

(2) Montrons que X n'est pas connexe si et seulement si X est fini.

Supposons X non connexe.

Alors il existe U et V deux ouverts non vides de X tels que $U \cap V = \emptyset$ et $X = U \sqcup V$.

Alors il existe $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in X$ tels que $V = X \setminus U = \{a_1, \dots, a_r\}$ et $U = X \setminus V = \{b_1, \dots, b_s\}$.

Donc $X = U \sqcup V$ est fini.

Supposons X fini. Puisque $X \neq \emptyset$, il existe $x \in X$. Alors $U := \{x\}$ et $V := X \setminus \{x\}$ sont des ouverts non vides et disjoints vérifiant $X = U \sqcup V$. Donc X n'est pas connexe.

(3) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $X = \bigcup_{i \in I} O_i$.

Si X est vide, il n'y a rien à faire. Supposons $X \neq \emptyset$ alors il existe $i_0 \in I$ tel que $O_{i_0} \neq \emptyset$.

Puis il existe $a_1, \dots, a_r \in X$ tels que $O_{i_0} = X \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$.

Pour $k = 1, \dots, r$, il existe $i_k \in I$ tel que $a_k \in O_{i_k}$. Ainsi $\bigcup_{k=0}^r O_{i_k} = X$.

- (4) a. Supposons $A = \emptyset$. Soit $\ell \in X$.
 Soit V un voisinage de ℓ . Alors il existe $a_1, \dots, a_r \in X$ tels que $\ell \in X \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \subset V$.
 Puisque $A = \emptyset$, pour $k = 1, \dots, r$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k \implies x_n \neq a_k$.
 Posons $N := \max(N_1, \dots, N_r)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ alors $x_n \in X \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \subset V$.
 Donc $(x_n)_n$ converge vers ℓ .
- b. Supposons que $A = \{\ell\}$.
 Soit V un voisinage de ℓ . Alors il existe $a_1, \dots, a_r \in X$ tels que $\ell \in X \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \subset V$.
 Pour $k = 1, \dots, r$, puisque $a_k \notin A$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k \implies x_n \neq a_k$.
 Posons $N := \max(N_1, \dots, N_r)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ alors $x_n \in X \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \subset V$.
 Donc $(x_n)_n$ converge vers ℓ .
- Soit $x \in X \setminus \{\ell\}$. Alors $X \setminus \{\ell\}$ est un voisinage ouvert de x .
 Puisque $\ell \in A$, $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et $x_n = \ell$.
 C'est exactement la négation de $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies x_n \in X \setminus \{\ell\}$.
 Donc $(x_n)_n$ ne converge pas vers x . Ainsi ℓ est l'unique limite de $(x_n)_n$.
- c. Supposons $|A| > 1$. Soit $x \in X$. Puisque $|A| > 1$, il existe $y \in A \setminus \{x\}$.
 Alors $V := X \setminus \{y\}$ est un voisinage ouvert de x .
 Puisque $y \in A$, $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et $x_n \notin V$.
 Donc $(x_n)_n$ ne converge pas vers x .
- (5) Soit O un ouvert non vide de Y pour la topologie induite.
 Alors il existe U un ouvert de X tel que $O = Y \cap U$.
 Ainsi U est non vide et donc $Y \setminus O = Y \setminus U \subset X \setminus U$ est fini.
 Par conséquent O est ouvert pour la topologie cofinie sur Y .

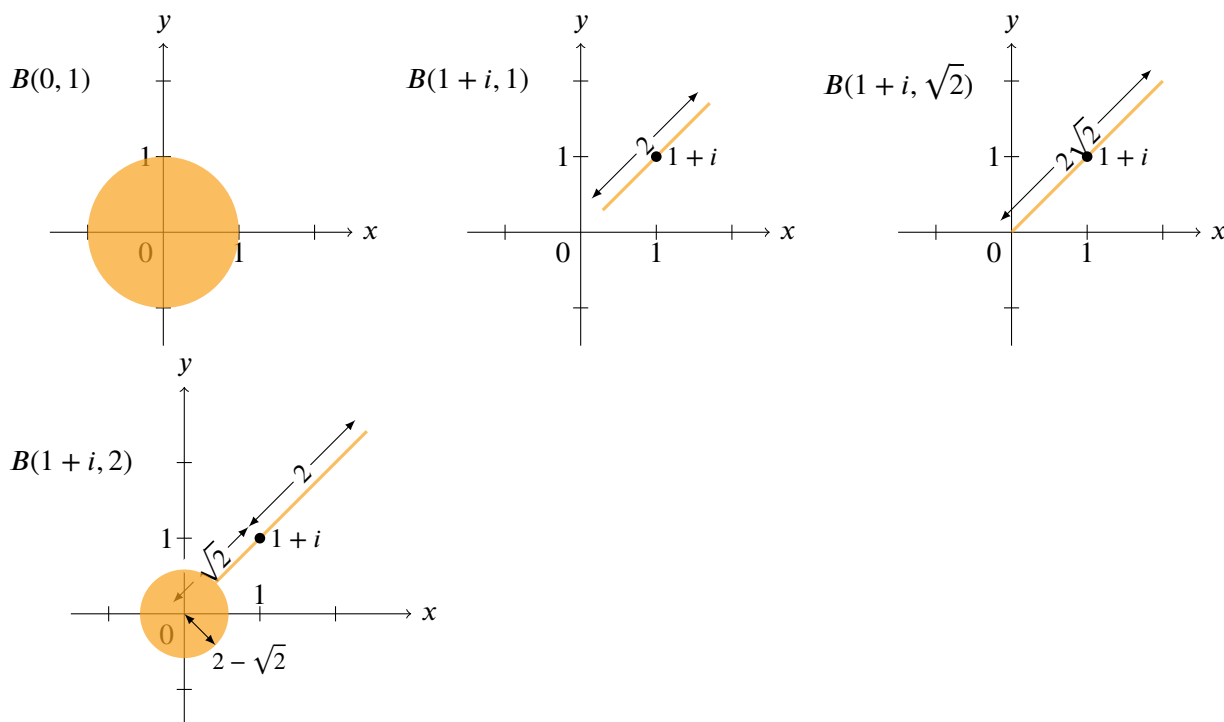
Soit O un ouvert non vide de Y pour la topologie cofinie.
 Alors il existe $a_1, \dots, a_r \in Y$ tels que $O = Y \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$.
 Ainsi $O = Y \cap (X \setminus \{a_1, \dots, a_r\})$ où $X \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$ est un ouvert de X .
 Donc O est ouvert pour la topologie induite.

Solution de l'exercice 3.

- (1) Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Si z et w sont colinéaires alors $|w - z| = d(z, w)$. Sinon $|w - z| \leq |z| + |w| = d(z, w)$.
- (2) • Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $z = 1 \cdot z$ donc $d(z, z) = |z - z| = 0$.
 • Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $d(z, w) = 0$.
 – Si z et w sont colinéaires alors $0 = d(z, w) = |w - z|$ d'où $z = w$.
 – Sinon $0 = d(z, w) = |z| + |w|$ d'où $|z| = |w| = 0$ et $z = w = 0$.
 • Soient $z, w \in \mathbb{C}$.
 – Si z et w sont colinéaires alors $d(z, w) = |w - z| = |z - w| = d(w, z)$.
 – Sinon $d(z, w) = |z| + |w| = |w| + |z| = d(w, z)$.
 • Soient $z, w, t \in \mathbb{C}$.
 – Si z et t sont colinéaires alors $d(z, t) = |z - t| \leq |z - w| + |w - t| \leq d(z, w) + d(w, t)$.
 – Si z et t ne sont pas colinéaires alors soit z et w ne le sont pas, soit w et t ne le sont pas.
 Dans le premier cas, on a $d(z, t) = |z| + |t| \leq |z| + |w| + |t - w| = d(z, w) + |t - w| \leq d(z, w) + d(w, t)$.
 Et dans le deuxième cas, $d(z, t) = |z| + |t| \leq |z - w| + |w| + |t| = |z - w| + d(w, t) \leq d(z, w) + d(w, t)$.

Donc d est bien une distance sur $\mathbb{C}$.

(3)



- (4) a. Soit O un ouvert de $\mathbb{C}$ pour d_e . Soit $z \in O$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{d_e}(z, \varepsilon) \subset O$. Soit $w \in B_d(z, \varepsilon)$. Alors, d'après la première question, $d_e(z, w) \leq d(z, w) < \varepsilon$. Donc $w \in B_{d_e}(z, \varepsilon) \subset O$. Donc O est un ouvert de $\mathbb{C}$ pour d .
- b. Supposons par l'absurde que $B_d(2, 1)$ soit un ouvert pour d_e . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{d_e}(2, \varepsilon) \subset B_d(2, 1)$. Mais $2 + \frac{\varepsilon}{2} \in B_{d_e}(2, \varepsilon) \cap B_d(2, i)^c$. D'où une contradiction, donc un ouvert pour d n'est pas nécessairement un ouvert pour d_e .
- (5) On sait que $\mathbf{H} \subset \overline{\mathbf{H}}^d$ et on déduit de la question précédente que $\overline{\mathbf{H}}^d \subset \overline{\mathbf{H}}^{d_e} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors $B_d\left(x, \frac{|x|}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ donc $x \notin \overline{\mathbf{H}}^d$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2}i \in B(0, \varepsilon) \cap \mathbf{H}$ donc $0 \in \overline{\mathbf{H}}^d$. Donc $\overline{\mathbf{H}}^d = \mathbf{H} \cup \{0\}$.
- (6) On sait que $\mathbf{D} \subset \overline{\mathbf{D}}^d$. Soit $z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$ alors il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $z = iy$. Puis $B_d\left(z, \frac{|z|}{2}\right) \subset \mathbf{D}$. Donc $z \in \mathring{\mathbf{D}}$. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\frac{\varepsilon}{2} \in B_d(0, \varepsilon) \cap \mathbf{D}^c$. Donc $0 \notin \mathring{\mathbf{D}}$. Ainsi $\mathring{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \setminus \{0\}$.

Solution de l'exercice 4.

- (1) • On a $\mathbb{Z}, \emptyset \in \mathcal{O}$.
 • Soit $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}^I$. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Puis il existe $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $S(a, x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.
 • Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$. Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Pour $i = 1, 2$, il existe $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $S(a_i, x) \subset U_i$. Posons $a := a_1 a_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Soit $y \in S(a_1 a_2, x)$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = a_1 a_2 n + x$. On a donc $y = a_1(a_2 n) + x \in S(a_1, x)$ et $y = a_2(a_1 n) + x \in S(a_2, x)$. Donc $S(a_1 a_2, x) \subset S(a_1, x) \cap S(a_2, x) \subset U_1 \cap U_2$. On a bien montré que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

- (2) Montrons d'abord que $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.
 Soient $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in S(a, b)$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = an + b$. Soit $y \in S(a, x)$ alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = am + x = a(m + n) + b \in S(a, b)$. Donc $S(a, x) \subset S(a, b)$. Ainsi $S(a, b) \in \mathcal{O}$.

Soit $U \in \mathcal{O}$. Soit $x \in U$. Alors il existe $a_x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $S(a_x, x) \subset U$. Donc $\bigcup_{x \in U} S(a_x, x) \subset U$. Soit $x \in U$ alors $x = a_x 0 + x \in S(a_x, x)$. Donc $U = \bigcup_{x \in U} S(a_x, x)$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base $\mathcal{O}$.

- (3) Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \neq y$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $y > x$. Posons $a := y - x + 1 > 1$. Alors $x = a0 + x \in S(a, x)$ et $y = a0 + y \in S(a, y)$. D'après la question précédente, $S(a, x)$ et $S(a, y)$ sont respectivement des voisinages ouverts de x et y . Supposons par l'absurde que $S(a, x) \cap S(a, y) \neq \emptyset$ alors il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $an + x = am + y$. Alors $a(n - m) = y - x = a - 1$ d'où $a|1$. Or $a > 1$, d'où une contradiction. Ainsi $S(a, x) \cap S(a, y) = \emptyset$. On a bien montré que $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ est un espace topologique séparé.
- (4) Montrons que $\mathbb{Z} \setminus S(a, b)$ est ouverte. Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus S(a, b)$. Soit $y \in S(a, x)$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = an + x$. Supposons par l'absurde que $y \in S(a, b)$ alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = am + b$ et ainsi $x = -an + y = a(m - n) + b \in S(a, b)$, d'où une contradiction. Donc $S(a, x) \subset \mathbb{Z} \setminus S(a, b)$. Par conséquent $\mathbb{Z} \setminus S(a, b) \in \mathcal{O}$, i.e. $S(a, b)$ est fermée.

Remarque : on aurait aussi pu remarquer que $\mathbb{Z} \setminus S(a, b) = \bigcup_{i=1}^{a-1} S(a, b + i)$.

- (5) Montrons la contraposée, i.e. qu'une partie ouverte est vide ou infinie.
 Soit U une partie ouverte non vide. Alors il existe $x \in U$. Par définition de $\mathcal{O}$, il existe $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $S(a, x) \subset U$. Or $S(a, x)$ est infinie puisque $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow S(a, x)$ définie par $\varphi(n) = an + x$ est injective. Donc U est infinie.

- (6) a. Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$.
 On déduit de l'existence de la décomposition en facteurs premiers, qu'il existe $p \in \mathbf{P}$ tel que $p|x$, i.e. $x \in p\mathbb{Z} = S(p, 0)$. Donc $x \in \bigcup_{p \in \mathbf{P}} S(p, 0)$.
 Réciproquement, soit $x \in \bigcup_{p \in \mathbf{P}} S(p, 0)$. Alors il existe $p \in \mathbf{P}$ tel que $x \in S(p, 0)$ puis il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = pn$. Soit $n = 0$ et alors $x = 0$ ou $n \neq 0$ et alors $|x| \geq p > 1$. Donc $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$.
 b. Supposons par l'absurde que $\mathbf{P}$ soit fini. Alors $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \in \mathbf{P}} S(p, 0)$ est fermé comme union finie de fermés. Ainsi $\{\pm 1\}$ est ouvert. Or $\{\pm 1\}$ est une partie non vide et finie, d'où une contradiction avec la question (5). Ainsi $\mathbf{P}$ est infini.