

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.

Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

**Exercice 1.** Topologie des boîtes

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques.

- (1) Rappeler la définition de la topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$ .
- (2) Montrer qu'il existe une topologie sur  $\prod_{i \in I} X_i$  dont une base est  $\mathcal{B} := \{\prod_{i \in I} U_i : U_i \text{ ouvert de } X_i\}$ .  
On l'appelle *topologie des boîtes*.
- (3) Montrer que si  $I$  est fini alors la topologie des boîtes et la topologie produit coïncident.
- (4) Montrer que si les  $X_i$  sont séparés alors  $\prod_{i \in I} X_i$  est séparé pour la topologie des boîtes.
- (5) a. On considère  $\{0, 1\}$  muni de la topologie discrète.  
Montrer que la topologie des boîtes sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$  coïncide avec la topologie discrète.  
b. Conclure qu'un produit d'espaces quasi-compacts n'est pas nécessairement quasi-compact pour la topologie des boîtes.  
c. Énoncer le théorème de Tychonoff.

**Exercice 2.**

Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $K$  une partie compacte non vide de  $X$ .

- (1) Montrer que  $(C_b^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ , l'espace des fonctions continues bornées pour la norme de convergence uniforme, est un espace de Banach.

On considère  $\Phi : C_b^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(K, \mathbb{R})$  définie par  $\Phi(f) = f|_K$ .

- (2) Montrer que  $\Phi$  est une application linéaire continue.

On définit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\alpha(t) := \frac{t}{\max(|t|, 1)}$ . À  $f \in C_b^0(X, \mathbb{R})$ , on associe  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(f) = 0 \\ \|\Phi(f)\|_{\infty} \alpha\left(\frac{f(x)}{\|\Phi(f)\|_{\infty}}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (3) Soit  $f \in C_b^0(X, \mathbb{R})$ .
  - a. Montrer que  $\tilde{f} \in C_b^0(X, \mathbb{R})$ .
  - b. Montrer que  $\Phi(f) = \Phi(\tilde{f})$ .
  - c. Montrer que  $\|\tilde{f}\|_{\infty} = \|\Phi(f)\|_{\infty}$ .
- (4) Montrer que  $\text{Im}(\Phi)$  est une sous-algèbre dense de  $C^0(K, \mathbb{R})$ .
- (5) Soit  $g \in C^0(K, \mathbb{R})$ .
  - a. Justifier brièvement qu'il existe une suite  $(f_n)_n \in C_b^0(X, \mathbb{R})$  telle que  $(\Phi(f_n))_n$  converge uniformément vers  $g$ .
  - b. Montrer qu'il existe  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\Phi(f_{\sigma(n+1)}) - \Phi(f_{\sigma(n)})\|_{\infty} \leq 2^{-n}.$$

- c. Montrer que  $\tilde{f}_{\sigma(0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\tilde{f}_{\sigma(n+1)} - \tilde{f}_{\sigma(n)})$  converge dans  $(C_b^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ .
  - d. On note  $f$  la limite obtenue dans la question précédente. Montrer que  $\Phi(f) = g$ .
- (6) Montrer que toute fonction  $g \in C^0(K, \mathbb{R})$  admet un prolongement en une fonction  $h \in C^0(X, \mathbb{R})$  vérifiant  $\|h\|_{\infty} = \|g\|_{\infty}$ .

**Exercice 3. Complétion d'un espace métrique****PARTIE I : applications uniformément continues.**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques.

- (1) Montrer que si  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy de  $X$  et que  $f : X \rightarrow Y$  est uniformément continue alors  $(f(x_n))_n$  est une suite de Cauchy de  $Y$ .
- (2) On suppose que  $Y$  est complet. Soit  $A \subset X$ . Montrer que toute application uniformément continue  $A \rightarrow Y$  se prolonge de façon unique en une application continue  $\overline{A} \rightarrow Y$ .

**PARTIE II : complétion d'un espace métrique.**

On appelle complété d'un espace métrique  $(X, d)$  un espace métrique complet  $(\hat{X}, \hat{d})$  muni d'une application  $\iota : X \rightarrow \hat{X}$  telle que  $\forall x, y \in X, \hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$  et  $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ .

- (1) Montrer qu'alors  $\iota$  est une injection continue.
- (2) Montrer que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application uniformément continue où  $Y$  est un espace métrique complet, alors il existe une application uniformément continue  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow Y$  telle que  $f = \hat{f} \circ \iota$ .
- (3) En déduire que le complété d'un espace métrique, s'il existe, est unique à isométrie près.
- (4) L'objectif de cette question est de montrer l'existence du complété. On note  $C$  l'ensemble des suites de Cauchy de  $X$ .

a. Montrer que  $\delta : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\delta((x_n)_n, (y_n)_n) := \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n)$  est bien définie.

b. Montrer que  $\delta$  induit une distance  $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $\hat{X} := C/\sim$  où

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Leftrightarrow \delta((x_n)_n, (y_n)_n) = 0.$$

c. Montrer que  $\iota : X \rightarrow \hat{X}$  qui à  $x$  associe la classe d'équivalence de la suite constante égale à  $x$  est une isométrie.

d. Montrer que  $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ .

*Indication : étant donnée une suite de Cauchy  $(x_n)_n$ , on pourra considérer  $\iota(x_n)$  pour  $n$  suffisamment grand.*

e. Montrer que  $\hat{X}$  est complet.

*Indication : à une suite de Cauchy  $(\alpha_n)_n$  de  $\hat{X}$ , associer  $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, \hat{d}(\iota(x_n), \alpha_n) \leq \frac{1}{n+1}$ .*

f. Conclure.