Université d'Angers – 2024/2025

Topologie et calcul différentiel

CC du 24/10/2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.
On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Soit $S := [0,1] \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$.
Est-ce que S est un ouvert ? Un fermé ?

Exercice 2.
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $K \subset E$ un compact.
Montrer qu'il existe un ouvert U tel que $K \subset U$ et $\overline{U}$ est un compact.

Exercice 3.
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et V un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) On suppose maintenant que $\mathring{V} \neq \emptyset$.

  a. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset V$.
  b. En déduire que $V = E$.

Exercice 4.
On rappelle qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* si tout segment joignant deux éléments de A est entièrement inclus dans A, autrement dit si

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (1-\lambda)x + \lambda y \in A.$$

(1) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Montrer que la boule unité fermée $B_f(0,1) := \{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}$ est une partie convexe de E.

(2) *L'objectif de cette question est de montrer que, dans la définition d'une norme, on peut remplacer l'inégalité triangulaire par la propriété que la boule unité fermée est convexe.*
Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0$;
- $B_f(0,1) := \{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}$ est une partie convexe de E.

  a. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $v := \frac{1}{\|x\|+\|y\|}(x+y) \in B_f(0,1)$.
  b. En déduire que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) := \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(1) Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, f admet une dérivée directionnelle en 0 dans la direction v.

(2) La fonction f est-elle continue en 0 ?
Indice : on pourra considérer $f(x, x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(3) La fonction f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 6.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique donné par :

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
On définit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $f(x) := \langle x, x\rangle^{-1}$.

(1) Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(2) Pour $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, donner la différentielle df_a.