

Analyse approfondie

Construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind

Il existe plusieurs constructions d'un corps totalement ordonné Dedekind-complet¹. Cependant deux tels corps sont isomorphes via un isomorphisme préservant l'ordre : $\mathbb{R}$ est donc bien l'*unique* corps totalement ordonné Dedekind-complet.

Parmi ces constructions, on peut citer :

- La construction par les coupures de Dedekind : si on aligne tous les nombres rationnels sur une droite et que l'on coupe la droite en deux, il est possible que le trait de coupe ne rencontre aucun nombre rationnel (présence de *trous* – il s'agit formellement d'une coupure n'admettant pas de borne supérieure, voir (I)). Cette construction consiste à obtenir $\mathbb{R}$ en comblant ces trous. Ce faisant on obtient un corps totalement ordonné vérifiant l'axiome des coupures (dont on montre facilement qu'il est équivalent à la propriété de la borne supérieure).
- La construction de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$: il s'agit d'ajouter formellement à $\mathbb{Q}$ les limites de suites de rationnels qui sont de Cauchy mais qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$ (en faisant attention que deux suites de Cauchy distinctes peuvent avoir la même limite). Le corps obtenu hérite du caractère archimédien de $\mathbb{Q}$: on obtient ainsi un corps totalement ordonné qui est Cauchy-complet et archimédien. Ces deux propriétés sont équivalentes à la propriété de la borne supérieure – attention, on peut construire un corps totalement ordonné Cauchy-complet, mais non-archimédien, qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$.
- On peut construire $\mathbb{R}$ à partir du développement décimal : un nombre réel correspond alors à la donnée d'un entier (partie entière) et d'une suite de chiffres (développement décimal de la partie fractionnaire) qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang. Cette construction semble a priori plus naturelle mais les opérations sont plus délicates à définir (cependant la propriété de la borne supérieure s'obtient facilement).
- Il existe d'autres constructions plus ou moins difficiles et naturelles (par exemple, $\mathbb{R}$ s'identifie à l'ensemble des *quasi-morphismes* de groupes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ modulo *quasi-égalité* – intuitivement, $\alpha \in \mathbb{R}$ correspond à $n \mapsto \lfloor \alpha n \rfloor$).

Le problème ci-dessous présente la construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind, ainsi que l'unicité de $\mathbb{R}$ (à isomorphisme près) dans la partie (VI).

On appelle *coupure de Dedekind* une partie $A \subset \mathbb{Q}$ vérifiant :

- (A1) $A \neq \emptyset$
- (A2) $A \neq \mathbb{Q}$
- (A3) $\forall r \in A, \forall s \in \mathbb{Q}, s < r \implies s \in A$
- (A4) $\forall r \in A, \exists s \in A, r < s$

On note l'ensemble des coupures de Dedekind par $\mathcal{R}$.

- (I) (I.1) Montrer que la condition (A3) est équivalente à $\forall r \in A, \forall s \in \mathbb{Q} \setminus A, r < s$.
- (I.2) Montrer qu'une coupure de Dedekind n'a pas de plus grand élément.
- (I.3) Pour $q \in \mathbb{Q}$, on pose $A_q := \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$.
 - (I.3.a) Montrer que A_q est une coupure de Dedekind.
 - (I.3.b) Montrer que $\Phi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ définie par $\Phi(q) = A_q$ est injective.
- (I.4) Montrer qu'une coupure de Dedekind A admet une borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$) si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $A = A_q$.

¹On rappelle qu'un corps totalement ordonné est *Dedekind-complet* s'il vérifie la propriété de la borne supérieure (toute partie non-vide et majorée admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant) ou tout autre énoncé équivalent (TVI, Rolle, TAF, Weierstrass, TFA, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente, toute suite décroissante et minorée converge...).

(II) Étant donnés $A, B \in \mathcal{R}$, on note $A \leq B$ pour $A \subset B$.

(II.1) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathcal{R}$.

(II.2) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R}, A > A_0 \Leftrightarrow 0 \in A$.

(II.3) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q}, r \leq s \implies \Phi(r) \leq \Phi(s)$.

(II.4) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R}, A < B \implies (\exists q \in \mathbb{Q}, A < A_q < B)$.

On vient de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathcal{R}$ pour l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathcal{R}$ induite par Φ .

(II.5) Soit $\mathcal{F}$ une partie non-vide et majorée de $\mathcal{R}$. Posons $M := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

(II.5.a) Montrer que $M \in \mathcal{R}$.

(II.5.b) Montrer que M est la borne supérieure de $\mathcal{F}$.

On vient de montrer que toute partie non-vide et majorée de $\mathcal{R}$ admet une borne supérieure.

(III) Pour $A, B \in \mathcal{R}$, on pose $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(III.1) Montrer que $A + B$ est une coupure de Dedekind.

(III.2) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q}, \Phi(r + s) = \Phi(r) + \Phi(s)$.

(III.3) Montrer que $+$ est commutative.

(III.4) Montrer que $+$ est associative.

(III.5) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R}, A + A_0 = A$.

(III.6) Pour $A \in \mathcal{R}$, on pose² $-A := \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{Q}, p > 0 \text{ et } -q - p \notin A\}$.

(III.6.a) Montrer que $-A$ est une coupure de Dedekind.

(III.6.b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R}, A + (-A) \subset A_0$.

(III.6.c) Soit $z \in A_0$ tel que $-z \in A$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-nz \in A$ et $-(n+1)z \in \mathbb{Q} \setminus A$.
En déduire qu'il existe $a \in A$ et $b \in -A$ tel que $z = a + b$.

(III.6.d) Soit $z \in A_0$ tel que $-z \in \mathbb{Q} \setminus A$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n-1)z \in \mathbb{Q} \setminus A$ et $nz \in A$.
En déduire qu'il existe $a \in A$ et $b \in -A$ tel que $z = a + b$.

(III.6.e) Conclure que $\forall A \in \mathcal{R}, A + (-A) = A_0$.

(III.7) Montrer que $\forall A, B, C \in \mathcal{R}, A \leq B \implies A + C \leq B + C$.

(IV) Pour $A, B \in \mathcal{R}$ vérifiant $A > A_0$ et $B > B_0$, on pose

$$A \cdot B := \{q \in \mathbb{Q} : \exists a \in A, \exists b \in B, a > 0, b > 0, q \leq ab\}.$$

(IV.1) Montrer que $A \cdot B$ est une coupure de Dedekind.

On prolonge la multiplication à $\mathcal{R}$ en utilisant la règle des signes :

	$A = A_0$	$A > A_0$	$A < A_0$
$B = A_0$	0	0	0
$B > A_0$	0	$A \cdot B$	$-((-A) \cdot B)$
$B < A_0$	0	$-(A \cdot (-B))$	$(-A) \cdot (-B)$

(IV.2) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q}, \Phi(rs) = \Phi(r) \cdot \Phi(s)$.

(IV.3) Montrer que $\cdot$ est commutative.

²La définition proposée pour $-A$ semble un peu tombée du ciel, expliquons-là.

On souhaite définir $B \in \mathcal{R}$ vérifiant $A + B = A_0$, i.e. $\{a + b : a \in A, b \in B\} = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$.

Il est donc naturel de vouloir poser $B := \{-r : r \in \mathbb{Q} \setminus A\}$. En effet, si $a \in A$ et $r \in \mathbb{Q} \setminus A$ alors, d'après (A4), il existe $s \in A$ tel que $a < s$. Puis, d'après la contraposée de (A3), $r \geq s$ d'où $r > a$, i.e. $a - r < 0$.

Mais il se peut que $\mathbb{Q} \setminus A$ ait un plus petit élément (par exemple, si $A = A_2$ alors $2 = \min(\mathbb{Q} \setminus A)$) : dans ce cas B admet un plus grand élément (par exemple, -2 si $A = A_2$) et n'est donc pas une coupure.

Il faut donc corriger la définition pour enlever le plus petit élément de $\mathbb{Q} \setminus A$ s'il existe :

$B := \{-r : r \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ et } r \text{ n'est pas le plus petit élément de } \mathbb{Q} \setminus A\} = \{-r : r \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ et } \exists x \in \mathbb{Q} \setminus A, r > x\}$
 $= \{q \in \mathbb{Q} : -q \notin A \text{ et } \exists x \in \mathbb{Q} \setminus A, -x - q > 0\} = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{Q}, p > 0 \text{ et } -q - p \notin A\}.$

- (IV.4) Montrer que $\cdot$ est associative.
- (IV.5) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R}, A \cdot A_1 = A$.
- (IV.6) Montrer que $\cdot$ est distributive par rapport à $+$, i.e. $\forall A, B, C \in \mathcal{R}, A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- (IV.7) Pour $A \in \mathcal{R}$ vérifiant $A > A_0$, on pose $A^{-1} := \{q/a : q \in \mathbb{Q}, q < 1 \text{ et } a \in \mathbb{Q} \setminus A\}$ et pour $A \in \mathcal{R}$ vérifiant $A < A_0$, on pose $A^{-1} := -(-A)^{-1}$.
- (IV.7.a) Montrer que pour $A \in \mathcal{R} \setminus \{A_0\}, A^{-1} \in \mathcal{R}$.
- (IV.7.b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{R} \setminus \{A_0\}, A \cdot A^{-1} = A_1$.
- (IV.8) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R}, A \geq A_0 \text{ et } B \geq A_0 \implies A \cdot B \geq A_0$.

On vient de montrer que $(\mathcal{R}, +, \cdot, A_0, A_1, \leq)$ est un corps totalement ordonné et Dedekind-complet.

On a aussi montré que $\Phi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ est un morphisme injectif de corps ordonnés.

En identifiant $\mathbb{Q}$ avec $\Phi(\mathbb{Q})$, on obtient que $\mathcal{R}$ contient une copie de $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathcal{R}$ et que les opérations sur $\mathcal{R}$ sont compatibles avec celles sur $\mathbb{Q}$. La question suivante montre que cette inclusion est stricte puisqu'il existe une coupure de Dedekind qui n'est pas dans $\Phi(\mathbb{Q})$ (à savoir, racine de 2).

(V) On définit $A_{\sqrt{2}} := \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \text{ ou } r^2 < 2\}$.

- (V.1) Montrer que $A_{\sqrt{2}}$ est une coupure de Dedekind.
- (V.2) Montrer que $A_0 < A_{\sqrt{2}}$.
- (V.3) Le but de cette question est de montrer que $A_{\sqrt{2}} \cdot A_{\sqrt{2}} = A_2$.
- (V.3.a) Montrer que $A_{\sqrt{2}} \cdot A_{\sqrt{2}} \subset A_2$.
- (V.3.b) Soit $t \in A_2$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $(2 - t)n > 1$.
- (V.3.c) Montrer qu'il existe $a \in A_{\sqrt{2}}$ et $b \in \mathbb{Q} \setminus A_{\sqrt{2}}$ tels que $b - a = \frac{1}{4n}$.
Indice : on pourra considérer $1 + \frac{k}{4n}$ où $k \in \{0, \dots, 4n\}$.
- (V.3.d) En déduire que $2 - a^2 < b^2 - a^2 < 2 - t$.
- (V.3.e) Conclure que $t \in A_{\sqrt{2}} \cdot A_{\sqrt{2}}$.
- (V.4) En déduire que Φ n'est pas surjective.

Il reste à vérifier qu'il existe un unique corps totalement ordonné Dedekind-complet (à isomorphisme près) : c'est l'objectif de la question suivante.

(VI) On considère $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ un autre corps totalement ordonné et Dedekind-complet. On va construire en plusieurs étapes un isomorphisme $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de corps qui préserve l'ordre. Pour cela, on pose :

- $\psi(A_0) = 0$
- Pour $n \in \mathbb{N}, \psi(A_n) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}$
- Pour $n \in \mathbb{Z}_{<0}, \psi(A_n) = -\psi(A_{-n})$
- Pour $q \in \mathbb{Q}$ de la forme $q = \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \psi(A_q) = \psi(A_a)\psi(A_b)^{-1}$
On remarquera que $1 + 1 + \dots + 1 > 0$ et que $\psi(A_q)$ ne dépend pas du choix de a et de b .

(VI.1) Montrer que $\forall r, s \in \mathbb{Q}, \psi(A_r + A_s) = \psi(A_r) + \psi(A_s)$ et $\psi(A_r \cdot A_s) = \psi(A_r) \cdot \psi(A_s)$.

(VI.2) Pour $A \in \mathcal{R}$, on pose maintenant $\psi(A) = \sup\{\psi(A_q) : q \in \mathbb{Q}, A_q < A\}$.

(VI.2.a) Montrer que $\sup\{\psi(A_q) : q \in \mathbb{Q}, A_q < A\}$ est bien défini.

(VI.2.b) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies (\exists q \in \mathbb{Q}, x < \psi(A_q) < y)$.

(VI.2.c) En déduire que les deux définitions données coïncident lorsque $A = A_q$ pour $q \in \mathbb{Q}$.

(VI.3) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R}, A \leq B \implies \psi(A) \leq \psi(B)$.

(VI.4) Montrer que ψ est injective.

Indice : on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{R}$ pour montrer qu'entre deux réels, il y a deux rationnels distincts.

(VI.5) Montrer que ψ est surjective.

Indice : on pourra montrer que, pour $x \in \mathbb{R}, x = \psi(M)$ où $M := \sup\{A_q : q \in \mathbb{Q}, \psi(A_q) < x\}$.

(VI.6) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{R}, \psi(A + B) = \psi(A) + \psi(B)$ et $\psi(A \cdot B) = \psi(A) \cdot \psi(B)$.

Indice : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser (VI.2.b).