

Analyse approfondie

Période 7

Exercice 1.

On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $x = \frac{1}{n}$ et par $f(x) = 1$ sinon.

- Déterminer $\int_0^1 f(x)dx$.
- (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[0, 1]$ telle que $L_P(f) > 1 - \varepsilon$.
On pourra considérer une subdivision dont le premier segment contient $\left\{ \frac{1}{k} : k \geq n \right\}$, pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
(b) En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$.
- La fonction f est-elle intégrable? Le cas échéant, quelle est la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$?

Exercice 2 (Fonction de Dirichlet).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $f|_{[0,1]}$ n'est pas intégrable.

Exercice 3 (Fonction de Thomae).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N}_{>0}, \text{pgcd}(p, q) = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Montrer que $f|_{[0,1]}$ est intégrable.

Exercice 4.

On considère $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^p$ où $p \in \mathbb{N}$ et où $0 < a < b$.

- Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ l'unique subdivision de $[a, b]$ en n intervalles dont les rapports des extrémités $\frac{x_k}{x_{k-1}}$ sont égaux. Calculer $U_P(f)$ et $L_P(f)$.
Indice : on pourra commencer par exprimer x_k en fonction de a, b et k .
- En déduire que $\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

Exercice 5.

- (a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
Montrer que si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
(b) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables.
Montrer que si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Construire une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle qu'il existe $x \in [a, b]$ vérifiant $f(x) > 0$ mais $\int_a^b f(x)dx = 0$.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > 0$.
(a) Montrer qu'il existe une subdivision P de $[a, b]$ telle que $L_P(f) > 0$.
(b) En déduire que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 6.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f est intégrable.

Exercice 7.

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante.

(a) Montrer que $\text{Im}(f) = [f(a), f(b)]$.

(b) Montrer que $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ définie par $\tilde{f}(x) := f(x)$ est bijective.

On notera abusivement f^{-1} pour la réciproque de $\tilde{f}$.

(c) Justifier que f et f^{-1} sont intégrables.

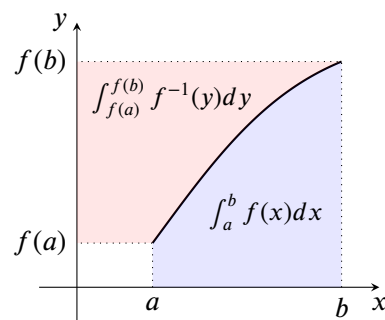
(d) Soit $P := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.

i. Montrer que $Q := \{f(a) = f(x_0) < f(x_1) < \dots < f(x_n) = f(b)\}$ est une subdivision de $[f(a), f(b)]$.

ii. Montrer que $L_{f^{-1}}(Q) + U_f(P) = bf(b) - af(a)$.

(e) En déduire que $\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a)$.

La figure ci-contre illustre la formule obtenue : l'aire de la partie colorée est la différence des aires des deux rectangles.



2. Application. Calculer la valeur de $\int_a^b \sqrt[p]{x} dx$ où $0 \leq a \leq b$ et où $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 8.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x) \cos(x) dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Exercice 9.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = \ell$.

Exercice 10.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

On définit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) := \int_a^x f(s) ds$.

1. Montrer que F est continue.
2. Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $\int_a^x f(s) ds = \int_x^b f(s) ds$.
3. Dans la question précédente, peut-on toujours prendre $x \in]a, b[$?

Exercice 11.

Les fonctions suivantes sont-elles intégrables? Le cas échéant, déterminer la valeur de l'intégrale.

1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 42 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. $g : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
3. $h : [0, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$.
4. $i : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i(x) = x + \lfloor x \rfloor$.
5. $j : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $j(x) = \begin{cases} x + \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 12 (Version intégrale du théorème des accroissements finis).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable, où $a < b$.

1. Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.
2. Le résultat est-il toujours valide si g change de signe ?

Exercice 13.

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et déterminer leurs dérivées.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^{x^3} \sin^2(t)dt$.
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_x^0 \frac{1}{1+t^2 + \sin^2(t)}dt$.
3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \int_0^{42} \frac{x}{1+t^2 + \sin^2(t)}dt$.

Exercice 14.

Montrer que les fonctions suivantes sont constantes.

1. $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$
2. $g :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 15.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $\int_0^x f(t)dt = 2x - 1$.

Exercice 16.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x))dx$.

Exercice 17.

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}$.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 18.1. *Intégrales de Wallis.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$
- (b) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (c) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- (e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
- (f) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $W_n W_{n+1}$ en fonction de n et en déduire que $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- (g) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ et que $\forall p \in \mathbb{N}$, $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

2. *Application : formule de Stirling.*

Pour $n \geq 1$, on définit $u_n := \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

- (a) Montrer que $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12n^2}$.
- (b) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge.
- (c) En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ converge.
- (d) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} C \sqrt{nn^n} e^{-n}$ (théorème de de Moivre).
- (e) Utiliser les résultats sur les intégrales de Wallis pour déterminer C .
L'équivalent de $n!$ obtenu s'appelle la formule de Stirling.

Exercice 19 (Irrationalité de π).

1. Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k r^{2n-2k} f^{(2k+1)}(x).$$

(on peut remarquer que la somme ci-dessus est finie puisque f est un polynôme).

- (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
- (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.
- (c) Montrer que $F''(x) = -r^2 F(x) + r^{2n+2} f(x)$.
- (d) Calculer $\frac{d}{dx} (F'(x) \sin(rx) - r F(x) \cos(rx))$.

(e) En déduire une expression de $\int_0^1 f(x) \sin(rx) dx$.

2. Montrer que

$$\forall r \in]0, \pi], r \in \mathbb{Q} \implies (\sin(r) \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \cos(r) \notin \mathbb{Q}).$$

3. En déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.