

Analyse approfondie

Période 6

1 L'ensemble des nombres réels

Exercice 1. Déterminer l'image des fonctions suivantes :

$$1. f_1 : \begin{array}{l} [-2, 3] \times [2, 4] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

$$3. f_3 : \begin{array}{l} [2, 3] \times [-2, -1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array}$$

$$2. f_2 : \begin{array}{l} [-1, 1] \times [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y \end{array}$$

$$4. f_4 : \begin{array}{l} [-6, -3] \times [2, 4] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \end{array}$$

Exercice 2. Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

$$1. \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$2. \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$$

Exercice 3.

$$1. \text{ Montrer que } \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

$$2. (a) \text{ Montrer que } \forall a, b, c \in \mathbb{R}, ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

$$(b) \text{ Montrer que } \forall a, b, c \in \mathbb{R}, 3ab + 3bc + 3ac \leq (a + b + c)^2.$$

$$3. (a) \text{ Montrer que } \forall a, b \geq 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

$$(b) \text{ Montrer que } \forall a, b, c \geq 0, (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Exercice 4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$.

Exercice 5. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$.

Exercice 6. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

$$1. \text{ Montrer que } \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0.$$

$$2. \text{ En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : } \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

3. Étudier le cas d'égalité.

4. Applications.

$$(a) \text{ Montrer que } \forall x_1, \dots, x_n \geq 0, \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}.$$

(b) On considère deux triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$. On note $\alpha_i = \overline{A_i B_i}$, $\beta_i = \overline{B_i C_i}$ et $\gamma_i = \overline{A_i C_i}$. Montrer que $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$ sont semblables si et seulement si

$$\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \sqrt{\beta_1 \beta_2} + \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} = \sqrt{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)}$$

Exercice 7.

$$1. \text{ Résoudre } |x^2 - 1| < x \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ Résoudre } |x^2 - 4x + 3| = 2x + 3 \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

$$3. \text{ Résoudre } |2x| \geq x^2 - 1 \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 9.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x = \max(x, 0) + \min(x, 0) \quad \text{et} \quad |x| = \max(x, 0) - \min(x, 0).$$

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$.

Exercice 11. Étant donné une partie $E \subset \mathbb{R}$, on rappelle que l'on dénote par $\max(E)$ le plus grand élément de E (s'il existe) et par $\sup(E)$ la borne supérieure de E (si elle existe).

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant :

1. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors E admet une borne supérieure.
2. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors $\max(E) = \sup(E)$.
3. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors E admet un plus grand élément.
4. Si $E \subset \mathbb{R}$ est majorée alors E admet une borne supérieure.
5. Si $E \subset \mathbb{R}$ est majorée et non-vidue alors E admet un plus grand élément.
6. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors E est majorée.
7. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors E est non-vidue.

Exercice 12. Pour chacune des parties suivantes de \mathbb{R} , déterminer, lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément :

- | | | |
|--------------------------------------|---|---|
| (1) $[-\pi, 42[$ | (4) \mathbb{N} | (6) $\left\{ \frac{n}{mn+1} : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ |
| (2) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ | | |
| (3) $[0, 1[\cap \mathbb{Q}$ | (5) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ | (7) $\left\{ \frac{n}{mn+1} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ |

Exercice 13. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

Lorsque l'assertion est vraie, on précisera la relation entre les bornes inférieures/supérieures considérées.

1. Si A admet une borne supérieure alors B admet une borne supérieure.
2. Si A admet une borne inférieure alors B admet une borne inférieure.
3. Si A admet une borne supérieure alors B admet une borne inférieure.
4. Si B admet une borne supérieure alors A admet une borne supérieure.
5. Si B admet une borne inférieure alors A admet une borne inférieure.

Exercice 14. Soient A et B deux parties non-vides et majorées de \mathbb{R} .

1. On pose $A + B := \{a + b : a \in A \text{ et } b \in B\}$ (somme de Minkowski).
 - (a) Montrer que $A + B$ est non-vidue et majorée.
 - (b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. (a) Montrer que $A \cup B$ est non-vidue et majorée.
 - (b) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 15. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides de \mathbb{R} telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b.$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure et que B admet une borne inférieure.
2. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 16. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ de sorte que $\inf(A)$ et $\sup(B)$ existent.

1. Montrer que si $\inf(A) = \sup(B)$ alors $A \cap B$ contient au plus un élément.
2. Sous l'hypothèse que $\inf(A) = \sup(B)$, l'intersection $A \cap B$ peut-elle être vide ?

Exercice 17. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est croissante alors f admet un point fixe, i.e. $\exists a \in [0, 1], f(a) = a$.

Indice : considérer $\{x \in [0, 1] : f(x) \geq x\}$.

Exercice 18.

1. Montrer que la fonction partie entière est croissante.
2. (a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
(b) En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 19. Donner une expression fermée du nombre de chiffres d'un entier strictement positif à l'aide du logarithme décimal et de la partie entière.

Rappel : le logarithme décimal est la fonction $\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exercice 20.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor}{n^2}$.
2. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
3. Donner une démonstration alternative utilisant la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Exercice 21. Soient I et J deux intervalles.

1. Montrer que $I \cap J$ est un intervalle.
2. Montrer que la somme de Minkowski $I + J$ est un intervalle.
3. (a) Montrer que si $I \cap J \neq \emptyset$ alors $I \cup J$ est un intervalle.
(b) Montrer que l'hypothèse de la question précédente n'est pas superflue.

Exercice 22. Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} .

Montrer que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset \implies I \cap J = \emptyset$.

Exercice 23. On définit l'ensemble des nombres dyadiques par $D := \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Montrer que D est dense dans \mathbb{R} , i.e. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.

Exercice 24.

1. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle ?
2. Le produit de deux nombres irrationnels est-il nécessairement irrationnel ?
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, x + y \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, xy \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 25. On rappelle que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.
2. Montrer que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

Exercice 26. Montrer que les nombres suivants sont irrationnels :

- | | |
|---|--|
| (a) \sqrt{p} où p est un nombre premier | (e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ |
| (b) $\sqrt{6}$ | (f) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ |
| (c) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{11}}$ | (g) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$ |
| (d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ | (h) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$. |
| | (i) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ |

Continuité uniforme

Exercice 27. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .
On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in I, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Montrer que si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue.

Exercice 28. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I .
Montrer que si f' est bornée alors f est uniformément continue.

Exercice 29. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe (et est finie).
2. Montrer que si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie alors f n'est pas uniformément continue.

Exercice 30. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. (a) Montrer que si f est uniformément continue alors $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq ax + b$.
(b) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors f n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que si f est continue et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est uniformément continue.
3. Supposons que f soit continue et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que l'on ne peut rien conclure sur la continuité uniforme de f .

Exercice 31. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, monotone et bornée où I est un intervalle.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 32.

1. Montrer que $x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
3. Montrer que $\frac{1}{x} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
4. Montrer que $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
5. Montrer que $\exp : [-\pi, \sqrt{42}] \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.
6. Montrer que $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.
7. Montrer que $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.
8. Montrer que $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.
9. Montrer que $\sin(1/x) :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
10. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle uniformément continue?

Exercice 33. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et uniformément continues sur un intervalle.

1. Montrer que fg est uniformément continue.
2. La conclusion reste-t-elle valide si f et g ne sont pas bornées?

Exercice 34. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique continue.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 35. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que si $\lim_{\substack{\mathbb{N} \\ n \rightarrow +\infty}} f(n) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. L'énoncé précédent reste-t-il vrai si l'on suppose la fonction seulement continue?