Université d'Angers – 2024/2025

Analyse approfondie

CC du 26/02/2025.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

Montrer que $\sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{21-12\sqrt{3}} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

1. Montrer que $\forall x, y \in [0,1],\ x+y-xy \leq 1$.
2. En déduire que $\forall x, y \in [0,1],\ x^2+y^2-xy \leq 1$.

Exercice 3.

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée et $M := \sup(A)$.
Montrer que si $M \notin A$ alors $\forall \varepsilon > 0,\ ]M-\varepsilon, M[\cap A$ contient une infinité d'éléments.

Exercice 4.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) - \lfloor nx \rfloor$.

   Montrer que f est périodique de période $\frac{1}{n}$.
3. En déduire l'identité d'Hermite : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 5.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $|f(1)| \leq \sqrt{\int_0^1 f'(x)^2 dx}$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que $f(0) = 0$?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 6.
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et positives.

1. Soient $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq c \leq d \leq b$. Montrer que
$$\sup_{[c,d]}(fg) - \inf_{[c,d]}(fg) \leq \sup_{[c,d]} f \sup_{[c,d]} g - \inf_{[c,d]} f \inf_{[c,d]} g.$$

2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq M$ et $g(x) \leq M$.

3. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
   Montrer que $U_P(fg) - L_P(fg) \leq M\left(U_P(f) - L_P(f) + U_P(g) - L_P(g)\right)$.

4. En déduire que $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Exercice 7.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n+3k}$.

Exercice 8.
Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : 1. ζ 2. Ξ 3. γ 4. ω

Solution de l'exercice 1.

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{21-12\sqrt{3}} &= \sqrt{\left(2\sqrt{3}+3\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}\\ &= \left|2\sqrt{3}+3\right|-\left|2\sqrt{3}-3\right|\\ &= 2\sqrt{3}+3-\left(2\sqrt{3}-3\right) && \text{car } 2\sqrt{3}>3\\ &= 6\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Méthode 2 :

Posons $\alpha := \sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}$ alors

$$\begin{aligned}\alpha^2 = \left(\sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}\right)^2 &= 3\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2\\ &= 3\left(7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}-2\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)\right)\\ &= 3\left(14-2\left(49-16\times 3\right)\right)\\ &= 3\left(14-2\left(49-48\right)\right)\\ &= 3\times 12\\ &= 36\end{aligned}$$

Donc $\alpha\in\{\pm 6\}\subset\mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 2.

1. *Méthode 1.* Soient $x, y\in[0,1]$. Alors $x+y-xy-1=(x-1)(1-y)\leq 0$ puisque $x-1\leq 0$ et $1-y\geq 0$. Donc $x+y-xy\leq 1$.

   Méthode 2. Soient $x, y\in[0,1]$. Alors

   $$\begin{aligned}x\leq 1 &\implies x-xy=x(1-y)\leq 1-y && \text{car } 1-y\geq 0\\ &\implies x+y-xy\leq 1-y+y=1.\end{aligned}$$

2. Soient $x, y\in[0,1]$. Alors $x\leq 1$ d'où $x^2\leq x$ puisque $x\geq 0$. De même $y^2\leq y$.
   Ainsi $x^2+y^2-xy\leq x+y-xy\leq 1$ d'après la question précédente.

Solution de l'exercice 3.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée telle que $M:=\sup(A)\notin A$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $]M-\varepsilon, M[\cap A$ soit finie.
Par définition du supremum, il existe $a\in A$ tel que $M-\varepsilon<a\leq M$.
Puisque $M\notin A$, on a nécessairement que $a<M$. Ainsi $]M-\varepsilon, M[\cap A\neq\emptyset$.
Donc $m:=\max\left(]M-\varepsilon, M[\cap A\right)$ est bien défini. Notons $\delta:=M-m>0$.
Par définition du supremum, il existe $a\in A$ tel que $M-\delta<a\leq M$.
Ainsi $M-\varepsilon<m=M-\delta<a<M$ (toujours car $M\notin A$ pour la dernière inégalité).
Donc $a\in]M-\varepsilon, M[\cap A$ et $a>m:=\max\left(]M-\varepsilon, M[\cap A\right)$. D'où une contradiction.
On a bien montré que $\forall\varepsilon>0,\ ]M-\varepsilon, M[\cap A$ contient une infinité d'éléments.

Solution de l'exercice 4.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1.$$
Puisque $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$, on déduit de l'unicité de la partie entière que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors
$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor\right) - \lfloor nx + 1 \rfloor \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) - \lfloor nx + 1 \rfloor \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) + \lfloor x + 1 \rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) + \lfloor x \rfloor - \lfloor nx \rfloor \qquad \text{d'après la question précédente} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) - \lfloor nx \rfloor = f(x) \end{aligned}$$
Donc f est $\frac{1}{n}$-périodique.

3. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$. Alors, $0 \leq nx < 1$ d'où $\lfloor nx \rfloor = 0$.
De même, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $0 \leq x + \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$ d'où $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0$.
Ainsi $f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) - \lfloor nx \rfloor = 0$.
Par $\frac{1}{n}$-périodicité de f, on obtient que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, i.e. $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor\right) - \lfloor nx \rfloor = 0$.
On a bien montré l'identité d'Hermite : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Solution de l'exercice 5.

1. Puisque f' est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est intégrable et, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a
$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = f(1).$$
On déduit de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que
$$\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f'(x) \cdot 1dx\right)^2 \leq \int_0^1 f'(x)^2 dx \int_0^1 1^2 dx = \int_0^1 f'(x)^2 dx.$$
Donc, en passant à la racine carrée, il vient $|f(1)| = \left|\int_0^1 f'(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f'(x)^2 dx}$.

2. Non, considérons $f \equiv 42$ alors $\sqrt{\int_0^1 f'(x)^2 dx} = 0 < |f(1)| = 42$.

Solution de l'exercice 6.

1. Soit $x \in [c,d]$ alors
$$f(x)g(x) \leq f(x) \sup_{[c,d]} g \leq \sup_{[c,d]} f \sup_{[c,d]} g$$
puisque les quantités considérées sont positives.
Ainsi $\sup_{[c,d]} f \sup_{[c,d]} g$ est un majorant de fg sur $[c,d]$ et donc $\sup_{[c,d]}(fg) \leq \sup_{[c,d]} f \sup_{[c,d]} g$.
On montre de même que $\inf_{[c,d]}(fg) \geq \inf_{[c,d]} f \inf_{[c,d]} g$.
D'où $\sup_{[c,d]}(fg) - \inf_{[c,d]}(fg) \leq \sup_{[c,d]} f \sup_{[c,d]} g - \inf_{[c,d]} f \inf_{[c,d]} g$.

2. Puisque f et g sont intégrables, elles sont bornées et donc majorées.
Ainsi, il existe $M_1 > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq M_1$ et il existe $M_2 > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ g(x) \leq M_2$.
Posons $M \coloneqq \max(M_1, M_2)$. Alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq M$ et $g(x) \leq M$.

3. On déduit des deux questions précédentes que :
$$\begin{aligned}
U_P(fg) - L_P(fg) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]}(fg) - \inf_{[x_{k-1},x_k]}(fg) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f \sup_{[x_{k-1},x_k]} g - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \inf_{[x_{k-1},x_k]} g \right) (x_k - x_{k-1}) && \text{par 1.} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f \sup_{[x_{k-1},x_k]} g - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \sup_{[x_{k-1},x_k]} g \right. \\
&\qquad \left. + \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \sup_{[x_{k-1},x_k]} g - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \inf_{[x_{k-1},x_k]} g \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} g \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \right. \\
&\qquad \left. + \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} g - \inf_{[x_{k-1},x_k]} g \right) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&\leq M \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f + \sup_{[x_{k-1},x_k]} g - \inf_{[x_{k-1},x_k]} g \right) (x_k - x_{k-1}) && \text{par 2.} \\
&= M \left(U_P(f) - L_P(f) + U_P(g) - L_P(g) \right).
\end{aligned}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable, il existe une subdivision P_1 de $[a,b]$ telle que $U_{P_1}(f) - L_{P_1}(f) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.
De même, puisque g est intégrable, il existe une subdivision P_2 de $[a,b]$ telle que $U_{P_2}(g) - L_{P_2}(g) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.
Posons $P \coloneqq P_1 \cup P_2$ alors, d'après la question précédente,
$$\begin{aligned}
U_P(fg) - L_P(fg) &\leq M \left(U_P(f) - L_P(f) + U_P(g) - L_P(g) \right) \\
&\leq M \left(U_{P_1}(f) - L_{P_1}(f) + U_{P_2}(g) - L_{P_2}(g) \right) \\
&\leq M \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$
On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(fg) - L_P(fg) \leq \varepsilon$, i.e. que fg est intégrable.

Solution de l'exercice 7.

1. Puisque $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1+x}{1+x^2} \end{array}$ est continue, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Puisque $\begin{array}{ccc} [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2+3x} \end{array}$ est continue, on a

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n+3k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2+3\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^2 \frac{1}{2+3x} dx = \left[\frac{1}{3}\ln(2+3x)\right]_0^2 = \frac{\ln 4}{3}.$$

Solution de l'exercice 8.

1. ζ : zeta minuscule ;
2. Ξ : xi majuscule ;
3. γ : gamma minuscule ;
4. ω : omega minuscule.