Université d'Angers – 2024/2025

Analyse approfondie

CC du 16 décembre 2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.
Soit $\alpha > 0$. Montrer que tout réel x s'écrit de façon unique sous la forme $x = k\alpha + r$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, \alpha[$.

Exercice 2.

1. Montrer que $\forall a, b > 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.
2. Déterminer la borne inférieure de $S \coloneqq \left\{ (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ : \ a, b, c > 0 \right\}$.

Exercice 3.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

1. Montrer que $cx + d \neq 0$.
2. Montrer que $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ n'est pas rationnel.

Exercice 4.

1. Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.
   Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
2. En déduire que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(x^2\right) \end{array}$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 5.
On considère $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = x$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $U_P(f) < \frac{1}{2} + \varepsilon$ et $L_P(f) > \frac{1}{2} - \varepsilon$.
2. En déduire que f est intégrable.
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ sans utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 6.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{x^2+y^2}\,dy$.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de f.

Exercice 7.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2}$.

Exercice 8.

Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : 1. κ 2. Π 3. Σ 4. σ

Solution de l'exercice 1.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $k := \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $r := x - k\alpha$. Alors $x = k\alpha + r$. De plus

$$\begin{aligned} k \leq \frac{x}{\alpha} < k+1 &\implies k\alpha \leq x < k\alpha + \alpha \qquad \text{car } \alpha > 0 \\ &\implies 0 \leq r = x - k\alpha < \alpha. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, \alpha[$ tels que $x = k\alpha + r$.

Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe aussi $k' \in \mathbb{Z}$ et $r' \in [0, \alpha[$ tels que $x = k'\alpha + r'$.
Alors $k\alpha + r = x = k'\alpha + r'$ donc $k - k' = \frac{r'-r}{\alpha}$. Or

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 \leq r < \alpha \\ 0 \leq r' < \alpha \end{cases} &\implies \begin{cases} -\alpha < -r \leq 0 \\ 0 \leq r' < \alpha \end{cases} \\ &\implies -\alpha < r' - r < \alpha \\ &\implies -1 < \frac{r'-r}{\alpha} < 1 \qquad \text{car } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Donc $k - k' \in \mathbb{Z}$ et $-1 < k' - k < 1$ d'où $k' - k = 0$, i.e. $k' = k$. Enfin $r' = x - k'\alpha = x - k\alpha = r$.

Solution de l'exercice 2.

1. Soient $a, b > 0$ alors
$$\begin{aligned} 0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab &\implies 2ab \leq a^2 + b^2 \\ &\implies 2 \leq \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \qquad \text{car } ab > 0. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in S$ alors il existe $a, b, c > 0$ tels que $x = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Ainsi
$$\begin{aligned} x = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\ &\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \qquad \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$
On a montré que $\forall x \in S,\ x \geq 9$, i.e. que 9 est un minorant de S.
De plus $(1+1+1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = 3 \times 3 = 9$, ainsi $9 \in S$. Donc $9 = \min S$ et $\inf S = 9$.

Solution de l'exercice 3.

1. Supposons par l'absurde que $cx + d = 0$.
   - *Premier cas :* $c = 0$. Alors $d = -cx = 0$ et donc $ad - bc = 0$. D'où une contradiction.
   - *Deuxième cas :* $c \neq 0$. Alors $x = -\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$. D'où une contradiction.

   Donc $cx + d \neq 0$.

2. Supposons par l'absurde que $t := \dfrac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$ alors $t(cx+d) = ax + b$ d'où $x(tc - a) = b - td$.
   - *Premier cas :* $tc - a \neq 0$. Alors $x = \frac{b-td}{tc-a} \in \mathbb{Q}$. D'où une contradiction.
   - *Deuxième cas :* $tc - a = 0$. Alors $b - td = x(tc-a) = 0$ et donc $0 = -d(tc-a) - c(b-td) = ad - bc$. D'où une contradiction.

   Donc $\dfrac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 4.

1. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que

   (1) $\quad \forall x, y \in D,\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

   (2) $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |x_n - y_n| \leq \eta.$

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ alors, d'après (2), $|x_n - y_n| \leq \eta$.
   Puisque $x_n, y_n \in D$, on déduit de (1) que $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$.
   On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$,
   i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n := \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $y_n := \sqrt{n\pi}$.
   Alors $x_n - y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{n\pi} = \frac{n\pi+\frac{\pi}{2}-n\pi}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{n\pi}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
   Mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x_n) - f(y_n)\right) \neq 0$ puisque $|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\sin\left(x_n^2\right) - \sin\left(y_n^2\right)\right| = 1$.
   On déduit de la question précédente que f n'est pas uniformément continue.

Solution de l'exercice 5.

1. Commençons par remarquer que f est bornée et donc que les sommes de Darboux et les intégrales inférieures et supérieures de f sont bien définies.
   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > \frac{1}{2}$.
   Considérons $P := \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ la subdivision régulière de $[0,1]$ en n segments, i.e. $x_k = \frac{k}{n}$. Alors

   $$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

   et

   $$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k-1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} - \varepsilon$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $U_P(f) < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ et $L_P(f) > \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
   On a bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$, i.e. que f est intégrable.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, d'après la question 1, il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $U_P(f) < \frac{1}{2} + \varepsilon$ et $L_P(f) > \frac{1}{2} - \varepsilon$.
   Ainsi, puisque f est intégrable, on a

   $$-\varepsilon < L_P(f) - \frac{1}{2} \leq \underline{\int_0^1} f(x)dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}$$

   et

   $$\varepsilon > U_P(f) - \frac{1}{2} \geq \overline{\int_0^1} f(x)dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}.$$

   On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0,\ -\varepsilon \leq \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} \leq \varepsilon$, donc $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 6.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'application $\begin{array}{ccc} [0, x^2] & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & e^{x^2+y^2} \end{array}$ est continue sur le segment $[0, x^2]$ (on remarque que $x^2 \geq 0$) et est donc intégrable.
   Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{x^2+y^2} dy$ est bien définie.

2. Puisque $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & e^{y^2} \end{array}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on déduit du théorème fondamental de l'analyse que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := \displaystyle\int_0^x e^{y^2} dy$ est dérivable de dérivée $F'(x) = e^{x^2}$.
   Ainsi, puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2} F\left(x^2\right)$, on a que f est dérivable par opérations élémentaires sur des fonctions dérivables et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x^2} F\left(x^2\right) + 2xe^{x^2} F'\left(x^2\right) \\ &= 2xe^{x^2} F\left(x^2\right) + 2xe^{x^2} e^{x^4} \\ &= 2xf(x) + 2xe^{x^2+x^4} \\ &= 2x\left(f(x) + e^{x^2+x^4}\right). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7.

1. Puisque la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{1+x^3} \end{array}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, on a que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + k^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{1 + (k/n)^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^3} = \frac{1}{3} \left[\ln\left(1 + x^3\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3}.$$

2. Puisque la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(1+x)^2} \end{array}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, on a que

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(k + n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1 + k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1 + x)^2} dx = -\left[\frac{1}{1 + x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Solution de l'exercice 8.

1. κ : kappa minuscule
2. Π : pi majuscule
3. Σ : sigma majuscule
4. σ : sigma minuscule