Université d'Angers – 2024/2025

Analyse approfondie

CC du 23 octobre 2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

1. Que signifie qu'une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ?
   On donnera la définition formelle avec des quantificateurs.
2. Est-ce que $[\pi, 42] \cap \mathbb{Q}$ est un intervalle ? Justifier.

Exercice 2.
Résoudre $|2x-1| > x^2 - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
Déterminer, lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de $E \coloneqq \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 4.
Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et bornée. On définit $\Delta \coloneqq \{|x-y| \;:\; x, y \in E\}$.

1. Montrer que Δ admet un plus petit élément.
2. Montrer que Δ est majoré.
3. Justifier que $\sup(E)$ et $\inf(E)$ existent.
4. Montrer que $\sup(\Delta) = \sup(E) - \inf(E)$.

Exercice 5. *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux (en justifiant votre réponse).
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor n+x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Exercice 6.
Montrer que $\forall x > 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 7.
Les nombres suivants sont-ils rationnels ou irrationnels ? Justifier.

(a) $\log(2) \coloneqq \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$ (b) $\sqrt{25}$ (c) $\sqrt{15}$ (d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

Exercice 8.
Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : 1. ν 2. ξ 3. Γ 4. H

Solution de l'exercice 1.

1. Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si

$$\forall x, y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R},\ x < z < y \implies z \in I.$$

__Remarque :__ on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.

2. Posons $x \coloneqq 4$, $y \coloneqq 42$ et $z \coloneqq 3\sqrt{2}$ alors on a
   - $x, y \in [\pi, 42] \cap \mathbb{Q}$
   - $x < z < y$
   - $z \notin [\pi, 42] \cap \mathbb{Q}$ (puisque $z \notin \mathbb{Q}$)

   On a bien montré que

$$\exists x, y \in [\pi, 42] \cap \mathbb{Q},\ \exists z \in \mathbb{R},\ x < z < y \text{ et } z \notin [\pi, 42] \cap \mathbb{Q}$$

   i.e. que $[\pi, 42] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.

   __Remarque :__ plutôt que de poser $z \coloneqq 3\sqrt{2}$, on aurait pu utiliser que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour en conclure l'existence de $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < z < y$.

Solution de l'exercice 2.
Méthode 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} |2x - 1| > x^2 - 1 &\Leftrightarrow 2x - 1 > x^2 - 1 \text{ ou } 2x - 1 < -x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) < 0 \text{ ou } x^2 + 2x - 2 < 0 \end{aligned}$$

Concernant la première inégalité :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Concernant la deuxième inégalité : il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = 12$ et dont le coefficient dominant est positif donc $x^2 + 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right[$.

Ainsi

$$\begin{aligned} |2x - 1| > x^2 - 1 &\Leftrightarrow x \in]0, 2[\cup \left]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right[\\ &\Leftrightarrow x \in \left]-1-\sqrt{3}, 2\right[\end{aligned}$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R},\ |2x - 1| > x^2 - 1 \Leftrightarrow x \in \left]-1-\sqrt{3}, 2\right[$.

Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- *Premier cas :* $x \geq \frac{1}{2}$. Alors $|2x-1| > x^2-1 \Leftrightarrow 2x-1 > x^2-1 \Leftrightarrow x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,2[$.
  L'ensemble des solutions sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est donc $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$.
- *Deuxième cas :* $x < \frac{1}{2}$.
  Alors $|2x-1| > x^2-1 \Leftrightarrow -2x+1 > x^2-1 \Leftrightarrow x^2+2x-2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right[$ puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont le coefficient dominant est positif et dont le discriminant est $\Delta = 12$.
  Donc l'ensemble des solutions sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ est $\left]-1-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right]$ puisque $-1+\sqrt{3} > \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{1}{2}, 2\right[\cup \left]-1-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right] = \left]-1-\sqrt{3}, 2\right[$.

Solution de l'exercice 3.

-
  - $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{0+1} \in E$.
  - Soit $x \in E$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. Ainsi $x \leq \sqrt{2}$.

  Donc $\sqrt{2}$ est le plus grand élément de E. C'est donc aussi la borne supérieure de E. On en déduit que l'ensemble des majorants de E est $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$.

- Montrons que $0 = \inf(E)$.
  - Soit $x \in E$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. Donc $x = \frac{\sqrt{2}}{n+1} > 0$.
  - Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > \sqrt{2}$.
    Posons $x \coloneqq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ alors $x \in E$ et $(n+1)\varepsilon > n\varepsilon > \sqrt{2}$ d'où $\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{n+1} = x$.

  On a bien montré que $\begin{cases} \forall x \in E,\ 0 < x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x < \varepsilon + 0 \end{cases}$ i.e. que $0 = \inf(E)$.
  On en déduit que l'ensemble des minorants de E est $]-\infty, 0]$.
  Puisque $0 \notin E$, E n'a pas de plus petit élément (sinon ce serait $\inf(E) = 0$).

Solution de l'exercice 4.

1. Puisque $E \neq \varnothing$, il existe $x \in E$. Donc $0 = |x-x| \in \Delta$.
   Soit $s \in \Delta$. Alors il existe $x, y \in E$ tels que $s = |x-y|$. D'où $s = |x-y| \geq 0$.
   Donc 0 est le plus petit élément de Δ.
2. Puisque E est majoré, il existe $N > 0$ tel que $\forall x \in E,\ |x| \leq N$.
   Soit $s \in \Delta$. Alors il existe $x, y \in E$ tels que $s = |x-y|$. D'où $s = |x-y| \leq |x| + |y| \leq 2N$.
   Posons $M \coloneqq 2N$. Alors on a bien montré que $\forall s \in \Delta, s \leq M$.
   Ainsi Δ est majoré par M.
3. $\sup(E)$ existe puisque E est non-vide et majoré et $\inf(E)$ existe puisque E est non-vide et minoré.
4.
   - Soit $s \in \Delta$. Alors il existe $x, y \in E$ tels que $s = |x-y|$.
     Premier cas : $x \geq y$.
     Alors $x \leq \sup(E)$ et $\inf(E) \leq y$ d'où $s = x - y \leq \sup(E) - \inf(E)$.
     Deuxième cas : $x < y$.
     Alors $y \leq \sup(E)$ et $\inf(E) \leq x$ d'où $s = y - x \leq \sup(E) - \inf(E)$.
     On a bien montré que $\forall s \in \Delta,\ s \leq \sup(E) - \inf(E)$.
   - Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in E$ tel que $\sup(E) - \frac{\varepsilon}{2} < x$.
     Par définition de la borne inférieure, il existe $y \in E$ tel que $\inf(E) + \frac{\varepsilon}{2} > y$. D'où $-y > -\inf(E) - \frac{\varepsilon}{2}$.
     Posons $s \coloneqq |x-y|$ alors $s \in \Delta$ et $s = |x-y| \geq x - y > \sup(E) - \inf(E) - \varepsilon$.

   On a montré que $\begin{cases} \forall s \in \Delta,\ s \leq \sup(E) - \inf(E) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists s \in \Delta,\ s > \sup(E) - \inf(E) - \varepsilon \end{cases}$, i.e. que $\sup(\Delta) = \sup(E) - \inf(E)$.

Solution de l'exercice 5.

1. (a) Vrai. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. D'où $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$. Puisque $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$, on a bien montré que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   (b) Faux. Posons $x \coloneqq \frac{1}{2}$ et $n \coloneqq 2$ alors $n\lfloor x \rfloor = 2 \cdot 0 = 0$ et $\lfloor nx \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} & 4n^2 \leq 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \\ \Longrightarrow\ & 2n \leq \sqrt{4n^2 + 4n} < 2n + 1 \quad \text{puisque } \sqrt{\cdot} \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[. \\ \Longrightarrow\ & 4n + 1 \leq n + (n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n + 2 \\ \Longrightarrow\ & 4n + 1 \leq \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 < (4n+1) + 1 \end{aligned}$$

On a montré que $4n + 1 \leq \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 < (4n+1) + 1$ avec $4n + 1 \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$.

Solution de l'exercice 6.
Montrons la contraposée : $\forall x > 0,\ \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}$.
Soit $x > 0$ tel que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$. Alors $x = \left(\sqrt{x}\right)^2 \in \mathbb{Q}$.

Remarque : *on pouvait aussi raisonner par l'absurde.*
Soit $x > 0$ tel que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, alors $x = \left(\sqrt{x}\right)^2 \in \mathbb{Q}$. D'où une contradiction.
Donc $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 7.

(a) Supposons par l'absurde que $\log(2) \in \mathbb{Q}$ alors il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{a}{b}$.
D'où $a\ln(10) = b\ln(2)$ et ainsi $\ln\left(10^a\right) = \ln(2^b)$. Donc $2^a 5^a = 2^b$. D'où une contradiction avec l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers.
Ainsi $\log(2) \notin \mathbb{Q}$.

(b) $\sqrt{25} = \frac{5}{1} \in \mathbb{Q}$.

(c) Supposons par l'absurde que $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\sqrt{15} = \frac{a}{b}$.
D'où $3 \cdot 5 \cdot b^2 = a^2$.
Alors 3 est un nombre premier qui apparaît un nombre impair de fois dans le terme de gauche et un nombre pair de fois dans le terme de droite. D'où une contradiction avec l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers.
Donc $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$.

(d) Supposons par l'absurde que $r \coloneqq \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Alors $r^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ d'où $\sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2} \in \mathbb{Q}$.
D'où une contradiction avec la question précédente.
Ainsi $\sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 8.

1. ν : nu minuscule
2. ξ : xi minuscule
3. Γ : gamma majuscule
4. H : eta majuscule