Université d'Angers – 2024/2025

Théorie des anneaux

CC du 19/06/2025.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.
Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.
Pour les deux premières questions, il n'est pas nécessaire de rappeler ce qu'est un anneau.

(1) Qu'est-ce qu'un anneau noethérien ?
(2) Qu'est-ce qu'un anneau principal ?
(3) Soient A un anneau et $x, y \in A$ tels que $1 - yx$ soit inversible.
  a. Montrer que si z est l'inverse de $1 - yx$ alors $z - 1 = yxz = zyx$.
  b. En déduire qu'il existe $t \in A$ tel que $t - 1 = xyt = txy$.
  c. Conclure que $1 - xy$ est inversible.

Exercice 2.

(1) L'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est-il intègre ?
(2) On considère le morphisme d'anneaux $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ défini par $\pi(n) := \overline{n}$.
  a. Montrer que si I est un idéal de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ alors $\pi^{-1}(I)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
  b. En déduire que tout idéal I de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est principal.
  c. L'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est-il principal ?
(3) Montrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ admet quatre idéaux que l'on donnera explicitement.
(4) Montrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ admet un unique idéal premier.

Exercice 3.

Partie I : quelques propriétés des idempotents.
On rappelle qu'un élément $x \in A$ d'un anneau A est appelé *idempotent* si $x^2 = x$.

(1) Quels sont les idempotents d'un anneau intègre ?
(2) Soit A un anneau. Montrer que si $a \in A$ est idempotent alors $1 - a$ l'est aussi.

Dans la suite de cette partie, on fixe A un anneau *commutatif* et $a, b \in A$ deux idempotents.

(3) a. Montrer que $a + b - ab$ est idempotent.
  b. Montrer que $(a, b) = (a + b - ab)$.
(4) a. Montrer que $b|a$ si et seulement si $a = ab$.
  b. En déduire que $(a) = (b)$ si et seulement si $a = b$.

Partie II : anneaux absolument plats.
On dit qu'un anneau A est *absolument plat* s'il est commutatif et si $\forall a \in A,\ a \in \left(a^2\right)$.

(5) Montrer qu'un corps est absolument plat.
(6) On suppose dans cette question que A est un anneau absolument plat.
  a. Soit $a \in A$. Montrer qu'il existe $b \in A$ tel que $a = ba^2$.
  b. Montrer que, pour a et b comme dans la question précédente, ba est idempotent et $(a) = (ba)$.
  c. En déduire que tout idéal principal de A est engendré par un idempotent.
(7) Soit A un anneau commutatif. Montrer que A est absolument plat si et seulement si tout idéal finiment engendré de A est engendré par un idempotent.
Indice : on pourra utiliser (6)c. et (3).

Tournez la page S.V.P.

Partie III : anneau des idempotents.
Dans cette partie, on considère A un anneau commutatif et $B \coloneqq \left\{a \in A \ : \ a^2 = a\right\}$.

(8) On définit $\circ \,:\, A \times A \to A$ par $a \circ b \coloneqq a + b - 2ab$.
Montrer que B est stable par $\circ$, i.e. si $a, b \in B$ alors $a \circ b \in B$.

(9) Montrer que $\circ$ admet un neutre dans B, que l'on note e.

(10) Montrer que $(B, \circ, \cdot, e, 1)$ est un anneau commutatif.

Exercice 4.
L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation diophantienne suivante

(E) $\quad x^3 - y^2 = 2, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$

(1) Montrer que l'anneau $A \coloneqq \mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right]$ est euclidien pour le stathme $v(z) = |z|^2$.

(2) Déterminer les inversibles de A.

(3) Montrer que A est factoriel.

On considère (x, y) une solution de (E) et on pose $z \coloneqq y + i\sqrt{2}$ de sorte que $x^3 = z\bar{z}$ dans A.

(4) Montrer que x et y sont impairs.

(5) Montrer que z et $\bar{z}$ sont premiers entre eux dans A.

(6) En déduire qu'il existe $w \in A$ tel que $z = w^3$ dans A.

(7) Conclure : déterminer les solutions de (E).