Université d'Angers – 2024/2025

Théorie des anneaux

CC du 28/04/2025.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

On considère l'unique morphisme d'anneaux $\Theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/(i-3)$, i.e. $\Theta(n) \coloneqq \overline{n}$.

(1) Montrer que Θ est surjectif.
(2) Montrer que $\ker(\Theta) = 10\mathbb{Z}$.
(3) En déduire que Θ induit un isomorphisme $\theta : \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/(i-3)$.
(4) L'idéal $(i-3)$ de $\mathbb{Z}[i]$ est-il premier ? maximal ?
(5) Déterminer θ^{-1}.

Exercice 2.

Soit $(A, +, \cdot, 0, 1)$ un anneau. On définit $\oplus : A \times A \to A$ et $\odot : A \times A \to A$ par

$$a \oplus b \coloneqq a + b + 1 \qquad \text{et} \qquad a \odot b \coloneqq ab + a + b.$$

(1) Montrer que $\oplus$ admet un neutre que l'on note e et que $\odot$ admet un neutre que l'on note u.
(2) Montrer que $(A, \oplus, \odot, e, u)$ est un anneau isomorphe à $(A, +, \cdot, 0, 1)$.
Indice : on pourra commencer par exhiber une bijection $\varphi : A \to A$ compatible avec les lois.

Exercice 3.

On définit l'ensemble des nombres décimaux par $\mathbb{D} \coloneqq \left\{ \frac{a}{10^k} \ : \ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{D}$ est un anneau intègre pour les lois usuelles.
(2) Déterminer l'ensemble $\mathbb{D}^*$ des inversibles de $\mathbb{D}$.
(3) a. Montrer que si I est un idéal de $\mathbb{D}$ alors $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
b. En déduire que $\mathbb{D}$ est principal.

Exercice 4.

On considère $A \coloneqq \{P \in \mathbb{Q}[X] \ : \ P(0) \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que A est un anneau intègre pour les lois usuelles.
(2) Montrer que $A^* = \{\pm 1\}$, i.e. que les inversibles de A sont 1 et -1.
(3) a. Soit $P \in A$ tel que $P(0) = 0$. Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ m | P$.
b. Montrer que les irréductibles de A sont :
- $\pm p$, où p est un nombre premier ;
- $\pm P$, où P est un irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(0) = 1$.

(4) Montrer que X ne s'écrit pas comme produit d'un inversible et d'irréductibles.
(5) Est-ce que A est factoriel ?
(6) Est-ce que A est noethérien ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5.

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les applications *surjectives* $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ telles que

(i) $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f(xy) = f(x) + f(y)$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f(x+y) \geq \min(f(x), f(y))$.

Pour tout l'exercice, on fixe une application f comme ci-dessus.

(1) a. Montrer que $f(1) = f(-1) = 0$.
   b. Soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Montrer que $f(-x) = f(x)$ et que $f\left(x^{-1}\right) = -f(x)$.
   c. Montrer que si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors $f(n) \geq 0$.
   d. En déduire que si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alors $f(n) \geq 0$.

(2) On pose $A \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ :\ f(x) \geq 0\} \cup \{0\}$.
   a. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$.
   b. Montrer que $A^* = \{x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ :\ f(x) = 0\}$,
   i.e. que les inversibles de A sont les antécédents de 0 par f.

(3) a. Montrer qu'il existe $\pi \in A$ tel que $f(\pi) = 1$.
   b. Montrer qu'un tel π est irréductible dans A.
   c. Montrer que si $\pi = \frac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux dans $\mathbb{Z}$ alors $f(a) = 1$ et $f(b) = 0$.
   Indice : on pourra utiliser une relation de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
   d. En déduire qu'il existe un nombre premier p tel que $f(p) = 1$.

On fixe un tel p dans la suite.

(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si p ne divise pas n dans $\mathbb{Z}$ alors $f(n) = 0$.
Indice : on pourra utiliser une relation de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

(5) Soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
   a. Montrer qu'il existe $a, b, n \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{a}{b}p^n$, $p \nmid a$ et $p \nmid b$.
   b. Déterminer $f(x)$ en fonction de n.

(6) Conclure : quelles sont les applications surjectives $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ vérifiant (i) et (ii) ?

Les questions suivantes concernent l'étude de l'anneau A défini à la question (2).

(7) a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$.
   b. En déduire que pour tout $x, y \in A \setminus \{0\}$, x divise y ou y divise x dans A.

(8) Soit I un idéal non-nul de A.
   a. Justifier qu'il existe $x \in I \setminus \{0\}$ minimisant $f(x)$.
   b. Montrer que $I = (x)$.
   c. L'anneau A est-il noethérien ? factoriel ?
   d. Montrer que $I = \left(p^n\right)$ où $n \coloneqq f(x) \in \mathbb{N}$.
   e. En déduire qu'il existe une bijection décroissante entre $\mathbb{N}$ et les idéaux non-nuls de A.

(9) Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant strictement A.
   a. Montrer que $\frac{1}{p} \in B$.
   b. En déduire que $B = \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 1.

(1) Soit $x \in \mathbb{Z}[i]/(i-3)$, alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \overline{a+ib}$.
D'où $x = \overline{a+ib} = \overline{a+3b} = \Theta(a+3b)$ puisque $a+3b \in \mathbb{Z}$.
Donc Θ est surjectif.

(2) Soit $n \in \ker(\Theta)$ alors $\overline{n} = \overline{0}$, i.e. il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $n = (i-3)(a+ib) = -b-3a+i(a-3b)$.
En identifiant les parties imaginaires, on a $0 = a-3b$, i.e. $a = 3b$.
Puis, en considérant les parties réelles, on obtient que $n = -b-3a = -10b \in (10)$.
Donc $\ker(\Theta) \subset (10)$.
Réciproquement, soit $n \in (10)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 10k$.
Puis $\Theta(n) = \overline{n} = \overline{10k} = \overline{k+3^2k} = \overline{k+i^2k} = \overline{0}$.
Donc $\ker(\Theta) = (10)$.

(3) Puisque Θ est surjectif de noyau (10), c'est une conséquence du premier théorème d'isomorphisme.

(4) On a $\mathbb{Z}[i]/(i-3) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ qui n'est pas intègre (puisque $\bar{2} \cdot \bar{5} = \bar{0}$).
Donc l'idéal $(i-3)$ de $\mathbb{Z}[i]$ n'est ni premier ni maximal.

(5) Tout élément de $\mathbb{Z}[i]/(i-3)$ est de la forme $\overline{a+ib}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
Puisque $\overline{a+ib} = \overline{a+3b} = \theta\left(\overline{a+3b}\right)$, on obtient que $\theta^{-1}\left(\overline{a+ib}\right) = \overline{a+3b}$.

Solution de l'exercice 2.

(1) Soit $a \in A$. Alors $(-1) \oplus a = -1+a+1 = a$ et $a \oplus (-1) = a-1+1 = a$.
De même $0 \odot a = 0+0+a = a$ et $a \odot 0 = 0+a+0 = a$.
Donc $e \coloneqq -1$ est un neutre de $\oplus$ et $u \coloneqq 0$ est un neutre de $\odot$.

(2) Considérons $\varphi : A \to A$ défini par $\varphi(a) = a+1$ alors φ est une bijection de réciproque $\varphi^{-1}(a) = a-1$.
De plus,

- $\varphi(0) = 1$.
- Soient $a, b \in A$ alors $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a+b+1) = (a+b+1)+1 = (a+1)+(b+1) = \varphi(a)+\varphi(b)$ et
- $\varphi(a \odot b) = \varphi(ab+a+b) = ab+a+b+1 = (a+1)(b+1) = \varphi(a)\varphi(b)$.

On déduit de l'existence de cette bijection compatible avec les lois que $(A, \oplus, \odot, -1, 0)$ est un anneau et que $\varphi : (A, \oplus, \odot, -1, 0) \to (A, +, \cdot, 0, 1)$ est un isomorphisme d'anneaux.

Solution de l'exercice 3.

(1) Montrons que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$:

- $1 = \frac{1}{10^0} \in \mathbb{D}$,
- soient $x, y \in \mathbb{D}$ alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^k}$ et $y = \frac{b}{10^l}$, d'où

$$x - y = \frac{a}{10^k} - \frac{b}{10^l} = \frac{a10^l - b10^k}{10^{k+l}} \in \mathbb{D} \qquad \text{et} \qquad xy = \frac{ab}{10^{k+l}} \in \mathbb{D}.$$

Donc $\mathbb{D}$ est un anneau intègre comme sous-anneau d'un anneau intègre.

(2) Soit $x \in \mathbb{D}^*$, alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^k}$ et $1 = x\frac{b}{10^l} = \frac{ab}{10^{k+l}}$. Donc $ab = 10^{k+l}$.
Donc les diviseurs premiers de a sont 2 et 5, i.e. il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $a = \pm 2^m 5^n$.
Donc $\mathbb{D}^* \subset \left\{ \frac{\pm 2^m 5^n}{10^k} \ : \ k, m, n \in \mathbb{N} \right\}$.
Réciproquement, soit $x \in \mathbb{D}$ de la forme $x = \frac{\pm 2^m 5^n}{10^k}$ où $k, m, n \in \mathbb{N}$.
Posons $y \coloneqq \frac{\pm 2^n 5^m 10^k}{10^{n+m}} \in \mathbb{D}$ alors $xy = 1$. Donc $x \in \mathbb{D}^*$.
Ainsi l'ensemble des inversibles de $\mathbb{D}$ est $\mathbb{D}^* = \left\{ \frac{\pm 2^m 5^n}{10^k} \ : \ k, m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

(3) a. Soit I un idéal de $\mathbb{D}$.
- $0 \in I \cap \mathbb{Z}$;
- Soient $x, y \in I \cap \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ alors $x + ay \in I$ puisque I est un idéal de $\mathbb{D}$ et $a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. Donc $x + ay \in I \cap \mathbb{Z}$.

Donc $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

b. Soit I un idéal de $\mathbb{D}$.
Puisque $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ qui est principal, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $I \cap \mathbb{Z} = (n)$ dans $\mathbb{Z}$.
Soit $x \in I$, alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{a}{10^k}$. D'où $x10^k \in I \cap \mathbb{Z}$.
Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x10^k = nm$. Ainsi $x = n\frac{m}{10^k} \subset (n)$ dans $\mathbb{D}$.
Réciproquement $(n) \subset I$ puisque $n \in I$. Donc $I = (n)$ dans $\mathbb{D}$.
Donc $\mathbb{D}$ est un anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux, i.e. c'est un anneau principal.

Solution de l'exercice 4.

(1) Montrons que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.
- $1 \in A$;
- soient $P, Q \in A$ alors $(P-Q)(0) = P(0)-Q(0) \in \mathbb{Z}$ et $(PQ)(0) = P(0)Q(0) \in \mathbb{Z}$ donc $P-Q, PQ \in A$.

Donc A est un anneau intègre comme sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$ qui est intègre (car $\mathbb{Q}$ est un corps).

(2) Puisque $1 \cdot 1 = 1$ et $(-1) \cdot (-1) = 1$, on a que $\{\pm 1\} \subset A^*$.
Réciproquement, soit $P \in A^*$ alors il existe $Q \in A$ tel que $PQ = 1$.
Donc $0 = \deg 1 = \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. Ainsi $\deg(P) = \deg(Q) = 0$.
Puisque $P(0), Q(0) \in \mathbb{Z}$, il existe $r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $P = r$ et $Q = s$. D'où $1 = rs$ dans $\mathbb{Z}$.
Et donc $P = r \in \{\pm 1\}$. On a bien montré que $A^* = \{\pm 1\}$.

(3) a. Soient $P \in A$ tel que $P(0) = 0$ et $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors il existe $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}$ tels que $P = \sum_{k=1}^{d} a_k X^k$.

D'où $P = m \sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{m} X^k$ où $\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{m} X^k \in A$. Donc $m|P$ dans A.

b. Soit P un irréductible de A, en particulier $P \neq 0$ et $P \notin A^* = \{\pm 1\}$. On va distinguer deux cas :
- *Premier cas :* $\deg(P) = 0$ alors $P = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1, 1\}$.
Alors forcément n est un nombre premier puisque sinon $n = kl$ avec $k, l \notin A^*$.
Réciproquement, si n est premier et que $n = kl$ alors $k \in \{\pm 1\} = A^*$ ou $l \in \{\pm 1\} = A^*$.
- *Deuxième cas :* $\deg(P) > 0$ alors $P(0) \neq 0$ d'après la question précédente.
Puis forcément $P(0) = \pm 1$ puisque sinon $P = P(0) \cdot \frac{P}{P(0)}$ avec $P(0), \frac{P}{P(0)} \in A \setminus A^*$.
Supposons que P ne soit pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ alors il existe $R, S \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P = RS$ et $\deg R, \deg S > 0$. Alors $P = \frac{R(0)S(0)}{R(0)S(0)} RS = \pm \frac{R}{R(0)} \frac{S}{S(0)}$ avec $\frac{R}{R(0)}, \frac{S}{S(0)} \in A \setminus A^*$.
D'où une contradiction avec l'irréductibilité de P dans A. Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Réciproquement, si P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et vérifie $P(0) = \pm 1$ alors P est irréductible dans A : si $P = RS$ avec $R, S \in A$ alors R ou S est dans $(\mathbb{Q}[X])^* \cap A = \mathbb{Q}^* \cap A = \{\pm 1\} = A^*$.

(4) Supposons par l'absurde que X s'écrive comme le produit d'un inversible et d'irréductibles. Alors il existe $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers et $P_1, \dots, P_s$ irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ vérifiant $P_k(0) = 1$ tels que $X = \pm p_1 \cdots p_r P_1 \cdots P_s$. En évaluant en 0, on obtient $0 = \pm p_1 \cdots p_r$. D'où une contradiction.

(5) L'anneau A n'est pas factoriel puisque tout élément d'un anneau factoriel s'écrit comme le produit d'un inversible et d'irréductibles.

(6) L'anneau A n'est pas noethérien puisque tout élément d'un anneau intègre et noethérien s'écrit comme le produit d'un inversible et d'irréductibles (sans forcément avoir l'unicité).

Solution de l'exercice 5.

(1) a. On a $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.
Puis $0 = f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = 2f(-1)$ d'où $f(-1) = 0$.

b. Soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Alors $f(-x) = f((-1)x) = f(-1) + f(x) = f(x)$.
Puis $f\left(x^{-1}\right) = f\left(x^{-1}\right) + f(x) - f(x) = f\left(x^{-1}x\right) - f(x) = f(1) - f(x) = -f(x)$.

c. Montrons le résultat par récurrence.
Initialisation au rang $n = 1$ *:* $f(1) = 0 \geq 0$.
Hérédité : supposons que $f(n) \geq 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Alors $f(n+1) \geq \min(f(n), f(1)) = \min(f(n), 0) = 0$.

d. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si $n > 0$ alors $f(n) \geq 0$ d'après la question précédente.
Si $n < 0$ alors $f(n) = f(-n) \geq 0$ d'après les questions précédentes.

(2) a. Montrons que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

- $f(1) = 0 \geq 0$ donc $1 \in A$.
- Soient $x, y \in A$.
  Si $x = y$ alors $x - y = 0 \in A$.
  Si $x = 0$ et $y \neq 0$ alors $f(x-y) = f(-y) = f(y) \geq 0$.
  Si $x \neq 0$ et $y = 0$ alors $f(x-y) = f(x) \geq 0$.
  Si $x \neq y$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors $f(x-y) \geq \min(f(x), f(-y)) = \min(f(x), f(y)) \geq 0$.
  Dans tous les cas $x - y \in A$.
- Soient $x, y \in A$.
  Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $xy = 0 \in A$.
  Sinon $xy \neq 0$ et $f(xy) = f(x) + f(y) \geq 0$, donc $xy \in A$.

Donc A est un anneau intègre comme sous-anneau d'un anneau intègre.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $f(n) \geq 0$ d'après la question (1).d., donc $n \in A$. Ainsi A contient $\mathbb{Z}$.

b. Soit $x \in A^*$ alors il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$.
Alors $x, y \neq 0$ et $0 = f(1) = f(xy) = f(x) + f(y)$. Puisque $f(x), f(y) \geq 0$, on a forcément $f(x) = 0$.
Réciproquement, soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = 0$, alors $f\left(x^{-1}\right) = -f(x) = 0$.
Donc $x^{-1} \in A$ et $xx^{-1} = 1$. Ainsi $x \in A^*$.
On a bien montré que $A^* = f^{-1}(0)$.

(3) a. Puisque f est surjective, il existe $\pi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tel que $f(\pi) = 1$. Puisque $f(\pi) = 1 \geq 0$, on a $\pi \in A$.

b. On a $\pi \neq 0$ et $\pi \notin A^*$ puisque $f(\pi) = 1 \neq 0$.
Soient $a, b \in A$ tels que $\pi = ab$. Alors $a, b \neq 0$ et $1 = f(\pi) = f(a) + f(b)$.
Donc $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ (sinon $f(a) + f(b) \geq 1 + 1 > 1$), i.e. $a \in A^*$ ou $b \in A^*$.
Donc π est irréductible.

c. **Méthode 1.** Écrivons $\pi = \frac{a}{b}$ où $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. Alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = au + bv$.
Ainsi $0 = f(1) = f(au + bv) \geq \min(f(au), f(bv))$. Or $f(au), f(bv) \geq 0$ puisque $au, bv \in \mathbb{Z}$.
Donc $f(au) = 0$ ou $f(bv) = 0$.
Si $0 = f(au) = f(a) + f(u)$ alors $f(a) = 0$ (car $f(a), f(u) \geq 0$ puisque $a, u \in \mathbb{Z}$) donc $1 = f(\pi) = f(a) - f(b) = -f(b) \leq 0$ (car $b \in \mathbb{Z}$). D'où une contradiction.
Donc $0 = f(bv) = f(b) + f(v)$ et $f(b) = 0$. Puis $1 = f(\pi) = f(a) - f(b) = f(a)$.
Méthode 2. Écrivons $\pi = \frac{a}{b}$ où $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. Alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = au + bv$.
Alors $b^{-1} = \pi u + v$ d'où $f\left(b^{-1}\right) \geq \min(f(\pi u), f(v)) = \min(f(\pi) + f(u), f(v)) = \min(1, 0) = 0$.
Donc $b^{-1} \in A$, d'où $b \in A^*$, i.e. $f(b) = 0$. Puis $f(a) = f(\pi) - f(b) = 1 - 0 = 1$.

d. On a $f(|a|) = f(a) = f(a) - f(b) = f(\pi) = 1$, donc on peut prendre $p \coloneqq |a| \in \mathbb{N}$.
Ensuite, comme p est irréductible dans A (d'après la question (3).b.), il l'est aussi dans $\mathbb{Z}$.

(4) Soit $n \in \mathbb{Z}$ qui n'est pas un multiple de p dans $\mathbb{Z}$.
Puisque p est un nombre premier on a donc $\operatorname{pgcd}(p, n) = 1$. Donc il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = pu + nv$.
D'où $0 = f(1) = f(pu + nv) \geq \min(f(pu), f(nv))$. Or $f(pu) = f(p) + f(u) = 1 + f(u) \geq 1$ puisque $u \in \mathbb{Z}$.
Donc $0 = f(nv) = f(n) + f(v)$. Puisque $n, v \in \mathbb{Z}$, on a $f(n), f(v) \geq 0$ et donc $f(n) = f(v) = 0$.
Donc $n \in A^*$.

(5) a. Soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Alors il existe $u, v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $x = \frac{u}{v}$.
Puis il existe $k, l \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $u = p^k a$, $v = p^l b$, $p \nmid a$ et $p \nmid b$. D'où $x = \frac{a}{b} p^{k-l}$.

b. Alors $f(x) = f(a) - f(b) + nf(p) = n$ car $f(a) = f(b) = 0$ d'après la question (4) et $f(p) = 1$.

(6) D'après la question précédente, si f vérifie les conditions de l'énoncé alors f est une valuation p-adique pour un certain nombre premier p.
Réciproquement, les valuations p-adiques vérifient les conditions de l'énoncé.

On dit que l'anneau A est un *anneau de valuation discrète* pour la valuation f.

(7) a. Soit $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Si $x \notin A$ alors $f(x) < 0$ d'où $f\left(x^{-1}\right) = -f(x) > 0$ et ainsi $x^{-1} \in A$.
Donc $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$.

b. Soient $x, y \in A \setminus \{0\}$. D'après la question précédente $xy^{-1} \in A$ ou $yx^{-1} \in A$.
Si $xy^{-1} \in A$ alors $x = xy^{-1}y$ et donc $y|x$. Si $yx^{-1} \in A$ alors $y = yx^{-1}x$ et donc $x|y$.

(8) a. L'ensemble $\{f(x) \,:\, x \in I \setminus \{0\}\}$ est une partie non-vide de $\mathbb{N}$ donc il admet un minimum (puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné).

b. Soit $y \in I \setminus \{0\}$ alors $f(y) \geq f(x)$ d'où $f\left(yx^{-1}\right) \geq 0$ et donc $yx^{-1} \in A$.
Ainsi $y = yx^{-1}x \in (x)$.
Réciproquement, puisque $x \in I$, on a $(x) = I$.

c. A est un anneau principal puisqu'il est intègre comme sous-anneau de $\mathbb{Q}$ qui est intègre et que tout ses idéaux sont principaux. Par conséquent A est noethérien et factoriel.

d. On a $f\left(p^n x^{-1}\right) = f\left(p^n\right) - f(x) = n - n = 0$ donc $p^n x^{-1} \in A^*$.
Ainsi $p^n = p^n x^{-1} x$ avec $p^n x^{-1} \in A^*$, d'où $\left(p^n\right) = (x) = I$.

e. Considérons $\varphi : \mathbb{N} \to \{I \neq \{0\} \text{ idéal de } A\}$ défini par $\varphi(n) = \left(p^n\right)$.
Si I est un idéal non-nul de A alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = \left(p^n\right) = \varphi(n)$. Donc φ est surjective.
Si $n, m \in \mathbb{N}$ vérifient $n < m$ alors $p^n | p^m$ dans A donc $\varphi(n) = \left(p^n\right) \supset \left(p^m\right) = \varphi(m)$.
De plus $f(p^n) = n < m = \min\left\{f(x) \,:\, x \in \left(p^m\right)\right\}$. Donc $\varphi(n) \supsetneq \varphi(m)$.
Ainsi φ est strictement décroissante et est donc injective.

(9) a. Soit $x \in B \setminus A$. Alors $n := f(x) < 0$. Donc $f\left(p^{-1}x^{-1}\right) = -1 - f(x) \geq 0$. Ainsi $p^{-1}x^{-1} \in A \subset B$.
Donc $p^{-1} = p^{-1}x^{-1}x \in B$.

b. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors d'après la question (5).a., il existe $a, b, n \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{a}{b} p^n$, $p \nmid a$ et $p \nmid b$.
Puisque $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) = 0$, on a $\frac{a}{b} \in A \subset B$. De plus $p \in A \subset B$ et $p^{-1} \in B$.
Donc $x = \frac{a}{b} p^n \in B$. Ainsi $\mathbb{Q} = B$.