Université d'Angers – 2024/2025

Théorie des anneaux

CC du 24/02/2025.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Vous devez **justifier toutes vos réponses**. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.*
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. *Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.*

(1) Qu'est-ce qu'un anneau à division ?
Il n'est pas nécessaire de rappeler ce qu'est un anneau.

(2) Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'anneaux ?

a. $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{Z}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ b. $g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i] & \to & \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \\ a+ib & \mapsto & \overline{a-3b} \end{array}$

Exercice 2.

Soit A un anneau. On définit le *centre* de A par $C(A) \coloneqq \{x \in A \ : \ \forall a \in A,\ xa = ax\}$.

(1) Montrer que le centre $C(A)$ est un sous-anneau de A.

(2) On rappelle que l'anneau des quaternions est défini par $\mathbb{H} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \ : \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$.
Déterminer le centre $C(\mathbb{H})$ de $\mathbb{H}$.
Indice : on pourra considérer $I \coloneqq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ *et* $J \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'anneau $A \coloneqq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(1) Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant.
  a. A est commutatif.
  b. A est intègre.

(2) Déterminer l'ensemble A^* des inversibles de A.

Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $A_d \coloneqq \{(x, y) \in A \ : \ d | y - x\}$.

(3) Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, A_d est un sous-anneau de A.

(4) L'objectif de cette question est de montrer que, réciproquemment, tout sous-anneau de A est de la forme A_d avec $d \in \mathbb{N}$.
Soit B un sous-anneau de A.
  a. Montrer que $H \coloneqq \{x \in \mathbb{Z} \ : \ (x, 0) \in B\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
  b. Soit $(x, y) \in A$. Montrer que $(x, y) \in B$ si et seulement si $(x - y, 0) \in B$.
  c. Déduire des questions précédentes qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_d$.

(5) Soient I_1 et I_2 deux idéaux de $\mathbb{Z}$.
  a. Montrer que $I_1 \times I_2$ est un idéal de A.
  b. Montrer que $A/(I_1 \times I_2)$ et $\left(\mathbb{Z}/I_1\right) \times \left(\mathbb{Z}/I_2\right)$ sont isomorphes.
  c. Déterminer un idéal maximal de A.
  d. Déterminer un idéal premier de A qui n'est pas maximal.

(6) Le but de cette question est de montrer que, réciproquemment, tout idéal de A est de la forme $I_1 \times I_2$.
Soit I un idéal de A. On note $I_1 \coloneqq \{x \in \mathbb{Z} \ : \ (x, 0) \in I\}$ et $I_2 \coloneqq \{y \in \mathbb{Z} \ : \ (0, y) \in I\}$.
  a. Montrer que I_1 est un idéal de $\mathbb{Z}$.
  On admettra dans la suite que I_2 est aussi un idéal de $\mathbb{Z}$.
  b. Montrer que $I = I_1 \times I_2$.
  c. En déduire que I est principal.
  d. L'anneau A est-il principal ?

Solution de l'exercice 1.

(1) Réponse 1 : un anneau à division est un anneau A tel que $A^* = A \setminus \{0\}$.
Réponse 2 : un anneau à division est un anneau non trivial tel que tout élément non nul est inversible, i.e. $A \neq \{0\}$ et $A \setminus \{0\} \subset A^*$.

(2) a. f n'est pas un morphisme d'anneaux puisque $f(1) = 0 \neq 1$.

b. g est un morphisme d'anneaux :

- $g(1) = \overline{1 - 3 \cdot 0} = \overline{1}$
- Soient $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ alors il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib$ et $w = c + id$. On a

$$g(z + w) = g\left((a + c) + i(b + d)\right) = \overline{a + c - 3(b + d)} = \overline{a - 3b} + \overline{c - 3d} = g(z) + g(w)$$

Ainsi que

$$g(zw) = g\left(ac - bd + i(ad + bc)\right) = \overline{ac - bd - 3(ad + bc)}$$

et

$$g(z)g(w) = \overline{a - 3b} \cdot \overline{c - 3d} = \overline{(a - 3b)(c - 3d)} = \overline{ac + 9bd - 3ad - 3bc} = \overline{ac - bd - 3(ad + bc)}$$

puisque $9 \equiv -1 \mod 10$. D'où $g(zw) = g(z)g(w)$.

Solution de l'exercice 2.

(1)
- Soit $a \in A$ alors $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. Donc $1 \in C(A)$.
- Soient $x, y \in C(A)$.
  - Soit $a \in A$ alors $a(x - y) = ax - ay = xa - ya = (x - y)a$ puisque $x, y \in C(A)$.
    On a montré que $\forall a \in A,\ a(x - y) = (x - y)a$, i.e. que $x - y \in C(A)$.
  - Soit $a \in A$ alors $a(xy) = axy = xay = xya = (xy)a$ puisque $x, y \in C(A)$.
    On a montré que $\forall a \in A,\ a(xy) = (xy)a$, i.e. que $xy \in C(A)$.

Donc $C(A)$ est un sous-anneau de A.

(2) Soit $Z \in C(\mathbb{H})$. Alors il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $Z \coloneqq \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$.
Puisque $Z \in C(\mathbb{H})$, on a $ZI = IZ$, i.e. $\begin{pmatrix} iz_1 & iz_2 \\ i\overline{z_2} & -i\overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 & -iz_2 \\ -i\overline{z_2} & -i\overline{z_1} \end{pmatrix}$. D'où $z_2 = -z_2$, i.e. $z_2 = 0$.
Puisque $Z \in C(\mathbb{H})$, on a $ZJ = JZ$, i.e. $\begin{pmatrix} -z_2 & -z_1 \\ \overline{z_1} & -\overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{z_2} & -\overline{z_1} \\ z_1 & -z_2 \end{pmatrix}$. D'où $z_1 = \overline{z_1}$, i.e. $z_1 \in \mathbb{R}$.
Ainsi $C(\mathbb{H}) \subset \left\{\lambda I_2 \ :\ \lambda I_2\right\}$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathbb{H}$ alors $(\lambda I_2)Z = Z(\lambda I_2)$. Donc $\lambda I_2 \in C(\mathbb{H})$.
On a bien montré que $C(\mathbb{H}) = \left\{\lambda I_2 \ :\ \lambda I_2\right\}$.

Solution de l'exercice 3.

(1) a. A est commutatif : soient $(a, b), (c, d) \in A$ alors $(a, b)(c, d) = (ac, bd) = (ca, db) = (c, d)(a, b)$.

b. A n'est pas intègre puisque $(1, 0)$ est un diviseur de zéro : $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$.

(2) Soit $(a, b) \in A^*$. Alors il existe $(c, d) \in A$ tel que $(a, b)(c, d) = (1, 1)$ i.e. $(ac, bd) = (1, 1)$.
Ainsi $a|1$ et $b|1$ d'où $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$.
Réciproquement, si $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$ alors $(a, b)(a, b) = (a^2, b^2) = (1, 1)$.
Donc $A^* = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$.

(3) Soit $d \in \mathbb{N}$, alors :

- $d|0 = 1-1$ donc $(1,1) \in A_d$.
- Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A_d$ alors $d|y_1 - x_1$ et $d|y_2 - x_2$.
  - Ainsi $d|(y_1-x_1)-(y_2-x_2) = (y_1-y_2)-(x_1-x_2)$ donc $(x_1,y_1)-(x_2,y_2) = (x_1-x_2, y_1-y_2) \in A_d$.
  - De même $d|y_2(y_1-x_1)+x_1(y_2-x_2) = y_1y_2 - x_1x_2$ donc $(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in A_d$.

Donc A_d est un sous-anneau de A.

(4) a.
- $(0,0) \in B$ donc $0 \in H$.
- Soient $x, y \in H$ alors $(x,0),(y,0) \in B$ d'où $(x-y,0) = (x,0)-(y,0) \in B$, donc $x-y \in H$.

Ainsi H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

b. Si $(x,y) \in B$ alors $(x-y,0) = (x,y) - y(1,1) \in B$.
Si $(x-y,0) \in B$ alors $(x,y) = (x-y,0) + y(1,1) \in B$.

c. Puisque H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $H = d\mathbb{Z}$.
Soit $(x,y) \in A$. On déduit des questions précédentes que :

$$\begin{aligned}(x,y) \in B &\Leftrightarrow (x-y,0) \in B && \text{d'après la question b.}\\ &\Leftrightarrow x-y \in H = d\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow d|x-y\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in A_d\end{aligned}$$

On a bien montré qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_d$.

(5) a. <u>Méthode 1 :</u> remarquons que $\varphi : \begin{array}{ccc} A & \to & (\mathbb{Z}/I_1) \times (\mathbb{Z}/I_2) \\ (x,y) & \mapsto & (\overline{x}, \overline{y}) \end{array}$ est un morphisme d'anneaux de noyau $I_1 \times I_2$. Donc $I_1 \times I_2 = \ker(\varphi)$ est un idéal.
<u>Méthode 2 :</u>
- $(0,0) \in I_1 \times I_2$
- Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in I_1 \times I_2$ et $(a,b) \in A$ alors
$$(a,b)(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (ax_1 + x_2, by_1 + y_2) \in I_1 \times I_2$$
puisque I_1 et I_2 sont des idéaux.

Donc $I_1 \times I_2$ est un idéal.

b. $\varphi : \begin{array}{ccc} A & \to & (\mathbb{Z}/I_1) \times (\mathbb{Z}/I_2) \\ (x,y) & \mapsto & (\overline{x}, \overline{y}) \end{array}$ est un morphisme d'anneaux surjectif de noyau $I_1 \times I_2$.
On déduit donc du premier théorème d'isomorphisme que φ induit un isomorphisme entre $A/(I_1 \times I_2)$ et $(\mathbb{Z}/I_1) \times (\mathbb{Z}/I_2)$.

c. $I := (2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ est un idéal de A d'après la question a.
On déduit de la question b que A/I est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est un corps : donc I est un idéal maximal de A.

d. $I := \{0\} \times \mathbb{Z}$ est un idéal de A d'après la question a.
On déduit de la question b que A/I est isomorphe à $\mathbb{Z}/\{0\} \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}$ qui est intègre mais n'est pas un corps : donc I est un idéal de A qui est premier mais qui n'est pas maximal.

(6) a.
- $0 \in I_1$ puisque $(0,0) \in I$.
- Soient $x, y \in I_1$ et $a \in \mathbb{Z}$. Alors $(ax+y,0) = (a,a)(x,0) + (y,0) \in I$ puisque $(x,0),(y,0) \in I$ et que I est un idéal de A. Donc $ax+y \in I_1$.

Donc I_1 est un idéal de $\mathbb{Z}$.

b. Soit $(x, y) \in I$. Alors $(x, 0) = (1, 0)(x, y) \in I$ puisque I est un idéal. Donc $x \in I_1$.
De même $(0, y) = (0, 1)(x, y) \in I$ et donc $y \in I_2$.
On a ainsi montré que $I \subset I_1 \times I_2$.
Soit $(x, y) \in I_1 \times I_2$ alors $(x, 0), (0, y) \in I$ et donc $(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in I$.
On a bien montré $I = I_1 \times I_2$.

c. Puisque I_1 et I_2 sont des idéaux de $\mathbb{Z}$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $I_1 = a\mathbb{Z}$ et $I_2 = b\mathbb{Z}$.
Ainsi $I = I_1 \times I_2 = ((a, b))$. Donc I est principal.

d. Bien que tous les idéaux de A soient principaux, A n'est pas un anneau principal puisque A n'est pas intègre.