Intégrale de Riemann, à la Darboux

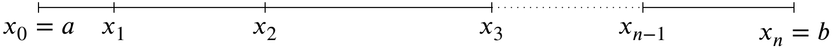
P7

Subdivisions

Définition

Une *subdivision* P d'un segment $[a, b]$ est la donnée d'une suite finie de $[a, b]$ qui est strictement croissante, dont le premier élément est a et dont le dernier élément est b.
On note une subdivision de la façon suivante : $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Intuitivement, on a scindé $[a, b]$ en un nombre fini de segments :

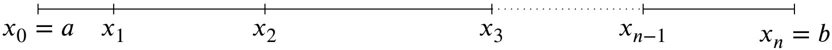


Subdivisions

Définition

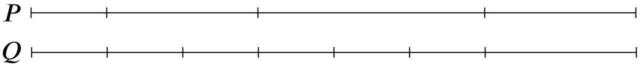
Une *subdivision* P d'un segment $[a, b]$ est la donnée d'une suite finie de $[a, b]$ qui est strictement croissante, dont le premier élément est a et dont le dernier élément est b.
On note une subdivision de la façon suivante : $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Intuitivement, on a scindé $[a, b]$ en un nombre fini de segments :



Définition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.



Sommes de Darboux – 1

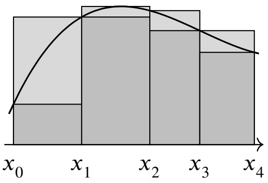
Définition

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
On définit la *somme de Darboux supérieure* de f selon P par

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)$$

et la *somme de Darboux inférieure* de f selon P par

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right).$$



Sommes de Darboux – 1

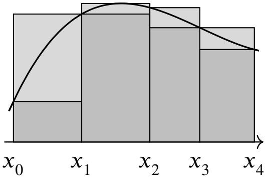
Définition

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
On définit la *somme de Darboux supérieure* de f selon P par

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$

et la *somme de Darboux inférieure* de f selon P par

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right).$$



Pourquoi suppose-t-on que f est bornée ?

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Démonstration. Il suffit d'étudier le cas d'une subdivision d'un intervalle en deux intervalles. Soit $c \in]x_{k-1}, x_k[$, alors

$$\begin{aligned}
(x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f &= (x_k - c + c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\
&= (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f + (x_k - c) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\
&\geq (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},c]} f + (x_k - c) \sup_{[c,x_k]} f.
\end{aligned}$$

■

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

Démonstration. En effet, si on pose $R \coloneqq P \cup Q$ alors R est plus fine que P et que Q, donc

$$L_P(f) \leq L_R(f) \leq U_R(f) \leq U_Q(f).$$

∎

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

Intégrales inférieure et supérieure

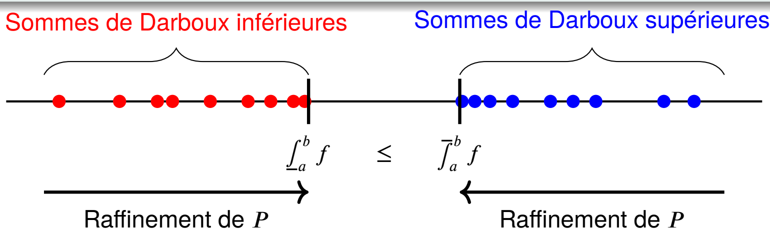
Définitions

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'**intégrale inférieure** de f par

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\left\{L_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}$$

et l'**intégrale supérieure** de f par

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}.$$



Intégrales inférieure et supérieure

Définitions

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'**intégrale inférieure** de f par

$$\underline{\int_a^b} f \coloneqq \sup\left\{L_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}$$

et l'**intégrale supérieure** de f par

$$\overline{\int_a^b} f \coloneqq \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}.$$

Pourquoi ces quantités sont-elles bien définies ?

Intégrale de Riemann

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

On dit que f est *intégrable* si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Le cas échéant, on dénote cette quantité par

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

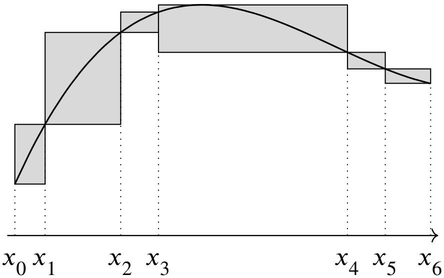
Un premier critère d'intégrabilité

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Graphiquement, ce critère énonce que f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivisation de $[a,b]$ telle que l'aire grisée ci-dessous soit plus petite que ε.



Ce critère ne donne pas la valeur de l'intégrale.

Un premier critère d'intégrabilité

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Démonstration.

$\Rightarrow$: Supposons que f soit intégrable, i.e. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une subdivision P_1 de $[a,b]$ telle que $U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$

et une subdivision P_2 de $[a,b]$ telle que $L_{P_2}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $P \coloneqq P_1 \cup P_2$. Alors $U_P(f) \leq U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ et $L_P(f) \geq L_{P_2}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $U_P(f) - L_P(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Un premier critère d'intégrabilité

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \le \varepsilon$$

Démonstration.
$\Leftarrow$: Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \le \varepsilon$.
Ainsi

$$L_P(f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U_P(f)$$

d'où

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le U_P(f) - L_P(f) \le \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le \varepsilon$,

d'où $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, i.e. f est intégrable. ∎

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$ (le résultat est évident si $c = a$ ou $c = b$).

$\Rightarrow$ Supposons que f soit intégrable sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Notons $\tilde{P} \coloneqq P \cup \{c\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Alors il existe $k \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que $x_k = c$.
Considérons $P' \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c\}$ et $P'' \coloneqq \{c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$.
Alors

$$U_{P'}(f_{[a,c]}) - L_{P'}(f_{[a,c]}) \leq U_{P'}(f_{[a,c]}) - L_{P'}(f_{[a,c]}) + U_{P''}(f_{[c,b]}) - L_{P''}(f_{[c,b]}) = U_{\tilde{P}}(f) - L_{\tilde{P}}(f) \leq U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

et

$$U_{P''}(f_{[c,b]}) - L_{P''}(f_{[c,b]}) \leq U_{P'}(f_{[a,c]}) - L_{P'}(f_{[a,c]}) + U_{P''}(f_{[c,b]}) - L_{P''}(f_{[c,b]}) = U_{\tilde{P}}(f) - L_{\tilde{P}}(f) \leq U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Donc $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables.

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$ (le résultat est évident si $c = a$ ou $c = b$).

$\Leftarrow$ Supposons que $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ soient intégrables.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe une subdivision $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c\}$ de $[a,c]$ et une subdivision $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ de $[c,b]$ telles que

$$U_{P_1}(f_{[a,c]}) - L_{P_1}(f_{[a,c]}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad U_{P_2}(f_{[c,b]}) - L_{P_2}(f_{[c,b]}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons la partition $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b\}$ de $[a,b]$, alors

$$U_P(f) - L_P(f) = \left(U_{P_1}(f_{[a,c]}) + U_{P_2}(f_{[c,b]})\right) - \left(L_{P_1}(f_{[a,c]}) + L_{P_2}(f_{[c,b]})\right) = U_{P_1}(f_{[a,c]}) - L_{P_1}(f_{[a,c]}) + U_{P_2}(f_{[c,b]}) - L_{P_2}(f_{[c,b]}) \leq \varepsilon.$$

Donc f est intégrable.

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$ (le résultat est évident si $c = a$ ou $c = b$).
Montrons l'égalité.
Soit P une partition de $[a,b]$ et $\tilde{P} \coloneqq P \cup \{c\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Il existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $x_k = c$.
Notons $P' \coloneqq \{a = x_0 < \cdots < x_k = c\}$ et $P'' \coloneqq \{c = x_k < \cdots < x_n = b\}$.

Alors $U_P(f) \geq U_{\tilde{P}}(f) = U_{P'}(f_{[a,c]}) + U_{P''}(f_{[c,b]}) \geq \displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Donc $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ est un minorant des sommes de Darboux supérieures de f. Montrons que c'est le plus grand.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des subdivisions P_1 de $[a,c]$ et P_2 de $[c,b]$ telles que $U_{P_1}(f_{[a,c]}) < \displaystyle\int_a^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ et $U_{P_2}(f_{[c,b]}) < \displaystyle\int_c^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$.

Considérons la subdivision de $[a,b]$ définie par $P \coloneqq P_1 \cup P_2$ alors $U_P(f) = U_{P_1}(f_{[a,c]}) + U_{P_2}(f_{[c,b]}) < \displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \varepsilon$.

Donc $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\} = \int_a^b f(x)dx$. ∎

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Corollaire

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Corollaire

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Convention de Chasles

Par définition, $\int_a^a f = 0$, ainsi, du fait de la relation de Chasles, il est naturel d'introduire la notation suivante.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors on pose

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $(fg) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $(fg) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz :
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$
4. si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $(fg) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz :
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$
4. si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 2

Il se peut que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit stricte.
Considérons $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = 0$ mais $\int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx = \frac{1}{4}$.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 2

Il se peut que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit stricte.
Considérons $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = 0$ mais $\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx = \frac{1}{4}$.

La réciproque du point 5 est fausse.
Considérons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $|f|$ est intégrable mais f ne l'est pas.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Démonstration. Soit $c \in [a,b]$. On définit $\chi_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $\chi_c(c) = 1$ et $\chi_c(x) = 0$ si $x \neq c$. Alors χ_c est bornée.

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ alors $L_P(\chi_c) = \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} \chi_c \right) = 0$.

Ainsi $\underline{\int}_a^b \chi_c = 0$.

Donc, 0 est un minorant des sommes de Darboux supérieures. Montrons que c'est le plus grand.

Soit $\varepsilon > 0$, alors, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 1$.

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ la subdivision de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Alors $U_P(\chi_c) = \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} \chi_c \right) \leq 2\frac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Donc $\overline{\int}_a^b \chi_c \coloneqq \inf\left\{U_P(\chi_c) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\} = 0$.

Ainsi $\int_a^b \chi_c(x)dx = 0$.

On obtient le théorème en remarquant que $\displaystyle f = \sum_{c \in [a,b] \setminus f^{-1}(\{0\})} f(c)\chi_c$. ∎

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Corollaire

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Corollaire

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Démonstration. D'après le théorème précédent $g - f$ est intégrable.
Donc $g = f + (g - f)$ est aussi intégrable et

$$\int_a^b g = \int_a^b (f + (g - f)) = \int_a^b f + \int_a^b (g - f) = \int_a^b f + 0.$$

■

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Corollaire

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Théorème

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Démonstration. Remarquons d'abord que f est bornée d'après le Théorème de Weierstrass (fonction continue sur un segment).
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Posons $n := \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor + 1$ et considérons la subdivision $P := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Alors $x_{k+1} - x_k \leq \eta$ et ainsi

$$U_P(f) - L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Donc f est intégrable. ∎

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Corollaire

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et admet un nombre fini de discontinuités alors f est intégrable.

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Corollaire

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et admet un nombre fini de discontinuités alors f est intégrable.

Idée de démonstration :

1. Fixer $\varepsilon > 0$.
2. Trouver une subdivision $P \coloneqq \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ telle que

$$\sum_{k \in I} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   où $I \coloneqq \{k \in \{1, \ldots, n\} : f \text{ n'est pas continue sur } [x_{k-1}, x_k]\}$.
3. Utiliser le résultat précédent sur chaque $[x_{k-1}, x_k]$, $k \notin I$, pour construire une subdivision $\tilde{P}$ plus fine que P vérifiant $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$. ■

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Corollaire

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et admet un nombre fini de discontinuités alors f est intégrable.

Remarque

On peut montrer plus précisément le *critère de Lebesgue* qui stipule qu'une fonction bornée sur un segment est Riemann-intégrable si et seulement si son lieu de discontinuité est négligeable. Ce résultat n'est pas exigible dans ce cours, mais est dans le polycopié pour les plus curieux.

Théorème de la moyenne : une version intégrale du théorème des accroissements finis

Théorème de la moyenne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Théorème de la moyenne : une version intégrale du théorème des accroissements finis

Théorème de la moyenne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que f est intégrable car continue.
Puisque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur un segment, d'après le théorème de Weierstrass, il existe $s, S \in [a,b]$ tels que $\forall x \in [a,b],\ f(s) \leq f(x) \leq f(S)$.
D'où $f(s)(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq f(S)(b-a)$ et $f(s) \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(S)$.
Puisque f est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

∎

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors F est dérivable et $F' = f$.

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors F est dérivable et $F' = f$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Soit $x \in I$ tel que $x \neq x_0$, alors

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe $\xi \in [x, x_0]$ si $x_0 > x$ ou $\xi \in [x_0, x]$ sinon, tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi).$$

Donc, par continuité de f, on a $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$.

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. ∎

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.
Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
Alors F est dérivable et $F' = f$.

Définition : primitive

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.
On dit que $F : D \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si F est dérivable et si $F' = f$.

Corollaire

Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.
Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
Alors F est dérivable et $F' = f$.

Une fonction peut admettre une primitive sans être intégrable.
Par exemple, définissons $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si x≠0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors F est dérivable mais $f = F'$ n'est pas intégrable (car non bornée).

Le théorème fondamental de l'analyse – 2

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Le théorème fondamental de l'analyse – 2

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Démonstration. Définissons $G : I \to \mathbb{R}$ par $G(x) := F(x) - \int_a^x f(t)dt$.

Alors G est dérivable sur I et $G' = f - f = 0$.
Donc G est constante sur I, i.e. il existe $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ G(x) = C$.

Ainsi $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. ∎

Le théorème fondamental de l'analyse – 2

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Corollaire

Deux primitives d'une fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

L'hypothèse que le domaine est un intervalle est importante. Définissons $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par

$$F_1(x) = \ln(|x|) \qquad \text{et} \qquad F_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|) + 42 & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) - \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors F_1 et F_2 sont deux primitives de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ mais $F_1 - F_2$ n'est pas constante.

Le théorème fondamental de l'analyse – 3

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Le théorème fondamental de l'analyse – 3

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. On déduit du corollaire précédent, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Ainsi $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt.$ ■

Le théorème fondamental de l'analyse – 3

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

En pratique on note $[F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$ (ou plus simplement $[F(x)]_a^b$ s'il n'y a pas de confusion possible).
Ainsi la conclusion du théorème fondamental de l'analyse se réécrit

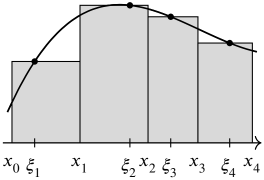
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Sommes de Riemann – 1

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ et, pour chaque $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, un élément $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
La *somme de Riemann* de f associée à P et $\xi \coloneqq (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est

$$S_{P,\xi}(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$

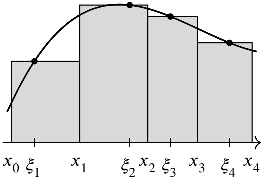


Sommes de Riemann – 1

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $P := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ et, pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, un élément $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
La *somme de Riemann* de f associée à P et $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ est

$$S_{P,\xi}(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$



- $L_P(f) \leq S_{P,\xi}(f) \leq U_P(f)$
- Il est naturel de fixer $\xi_k = x_{k-1}$, $\xi_k = x_k$ ou $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \dots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\left(S_{P_n,\xi_n}(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann associées à f vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{P_n,\xi_n}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\left(S_{P_n,\xi_n}(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann associées à f vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{P_n,\xi_n}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Le théorème est vrai pour toute fonction intégrable (voir polycopié) mais la démonstration est plus simple lorsque la fonction est supposée continue.

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\left(S_{P_n,\xi_n}(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann associées à f vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{P_n,\xi_n}(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, f est uniformément continue.
Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \|P_n\| \leq \eta$.
Soit $n \geq N$. Notons $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b\}$ et $\xi_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_{P_n,\xi_n}(f)\right| = \left|\sum_{k=1}^r \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - (x_k - x_{k-1})f(\xi_k)\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^r \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(\xi_k)\right) dx\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^r \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left|f(x) - f(\xi_k)\right| dx \leq \sum_{k=1}^r \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left|\int_a^b f(x)dx - S_{P_n,\xi_n}(f)\right| \leq \varepsilon$. ∎

Sommes de Riemann – 3

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$

Sommes de Riemann – 3

Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$

Démonstration. On considère la subdivision $P_n \coloneqq \{x_k \coloneqq a + k\frac{b-a}{n} \ : \ k = 0, \dots, n\}$.

Alors $\|P_n\| = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour le premier point, il s'agit de la somme de Riemann obtenue avec $\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Pour le second, de la somme de Riemann obtenue avec $\xi_k = x_{k-1}$. ■

Sommes de Riemann – 3

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$

Exemple

Comme $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

Intégration par parties – 1

Théorème : formule d'intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Théorème : formule d'intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. Les fonctions u et v sont continues et donc intégrables.
De même les fonctions u' et v' sont intégrables par hypothèse.
Donc les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ sont intégrables et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b .$$

∎

Intégration par parties – 1

Théorème : formule d'intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. Les fonctions u et v sont continues et donc intégrables.
De même les fonctions u' et v' sont intégrables par hypothèse.
Donc les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ sont intégrables et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b .$$

■

En pratique, les fonctions u et v sont généralement dérivables de dérivées continues (et donc u' et v' sont intégrables car continues).

Intégration par parties – 2

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx$.

On considère $u, v : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définies par $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = x$.
Alors u et v sont dérivables de dérivées $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = 1$.
D'où, par IPP,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)dx &= \int_0^\pi u'(x)v(x)dx\\ &= [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u(x)v'(x)dx\\ &= \pi + \int_0^\pi \cos(x)dx\\ &= \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi.\end{aligned}$$

Intégration par parties – 3

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x dx$.

On considère $u_1, v_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $u_1(x) = e^x$ et $v_1(x) = \cos(x)$.
Alors u_1 et v_1 sont dérivables de dérivées $u_1'(x) = e^x$ et $v_1'(x) = -\sin(x)$, d'où par IPP :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1'(x)v_1(x)dx = \left[u_1(x)v_1(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)v_1'(x)dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)dx.$$

On considère désormais $u_2, v_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $u_2(x) = e^x$ et $v_2(x) = \sin(x)$.
Alors u_2 et v_2 sont dérivables de dérivées $u_2'(x) = e^x$ et $v_2'(x) = \cos(x)$, d'où par IPP :

$$I = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2'(x)v_2(x) = -1 + \left[u_2(x)v_2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2(x)v_2'(x)dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$$

Donc $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Formule de changement de variable – 1

Théorème : formule d'intégration par changement de variable

Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a, b])$.
Alors
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Formule de changement de variable – 1

Théorème : formule d'intégration par changement de variable

Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a, b])$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Démonstration.
Remarquons que $I \coloneqq \varphi([a, b])$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires (et même un segment d'après le théorème de Weierstrass).
Ainsi f admet une primitive F sur I.
Puisque f est continue, et donc intégrable, sur $[\min(\varphi(a), \varphi(b)), \max(\varphi(a), \varphi(b))]$ et que $(F \circ \varphi)' = f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est continue, et donc intégrable, sur $[a, b]$, on obtient

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(u)du$$

D'après la convention de Chasles, la dernière égalité est vraie même si $\varphi(b) \leq \varphi(a)$. ■

Formule de changement de variable – 1

Théorème : formule d'intégration par changement de variable

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a,b])$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Moyen mnémotechnique

En pratique, on voit φ comme une nouvelle variable dénotée u et on écrit sa dérivée avec la notation de Leibniz $\frac{du}{dx} := \varphi'(x)$, i.e.

$$u = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad du = \varphi'(x)dx$$

de sorte que la formule du théorème s'écrive alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Formule de changement de variable – 2

Exemple

On souhaite calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Formule de changement de variable – 2

Exemple

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Dans l'exemple précédent, nous reconnaissons une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3}{3}\right)'(x)dx = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Formule de changement de variable – 2

Exemple

On souhaite calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Dans l'exemple précédent, nous reconnaissons une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3}{3}\right)'(x)dx = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

L'exemple suivant est plus intéressant puisque de la forme $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, difficile à calculer directement.

Exemple

On souhaite calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. On pose $x = \sin(\theta)$, alors

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)+2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$