L'ensemble des nombres réels

12 septembre 2024 – 30 septembre 2024

Analyse approfondie

- CM & TD : Jean-Baptiste Campesato
- Séances (P6+P7) : 8 CM et 16 TD.
  Attention les horaires varient d'une semaine à l'autre !
- E-mail : `jb.campesato@univ-angers.fr`
- Notes de cours : `https://math.univ-angers.fr/~campesato/ens/aa.pdf`
- 1 Nombres réels (§2)
  2 Continuité uniforme (§8)
  3 Intégrale de Riemann (§9)
- Diapositives : `https://math.univ-angers.fr/~campesato/ens.html`

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R}\ni 0\neq 1\in\mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R}\ni 0\neq 1\in\mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ est un corps commutatif :
  1. L'addition est associative : $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ (x+y)+z=x+(y+z)$
  2. 0 est le neutre de l'addition : $\forall x\in\mathbb{R},\ x+0=0+x=x$
  3. Existence d'un inverse additif : $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists(-x)\in\mathbb{R},\ x+(-x)=(-x)+x=0$
  4. L'addition est commutative : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x+y=y+x$
  5. La multiplication est associative : $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ (xy)z=x(yz)$
  6. 1 est le neutre de la multiplication : $\forall x\in\mathbb{R},\ 1\cdot x=x\cdot 1=x$
  7. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
     $$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ x(y+z)=xy+xz \text{ et } (x+y)z=xz+yz$$
  8. Existence d'un inverse multiplicatif : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists x^{-1}\in\mathbb{R},\ xx^{-1}=x^{-1}x=1$
  9. La multiplication est commutative : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ xy=yx$
- $(\mathbb{R},\leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné :
  1. $\leq$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$
  2. $\leq$ est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y$ et $y \leq x) \implies x = y$
  3. $\leq$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y$ et $y \leq z) \implies x \leq z$
  4. $\leq$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ ou $y \leq x$
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet.

L’ensemble des nombres réels

L’ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l’addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$ est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L’ordre est compatible avec la structure de corps :
  1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$
  2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy$
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet :
  Informellement, cette propriété signifie que
  1. il n'y a pas de nombre réel infiniment petit ou infiniment grand (*propriété archimédienne*, déjà vraie pour $\mathbb{Q}$) et
  2. il ne *manque* pas de nombre réel : toute suite de chiffres forme le développement décimal d'un nombre réel.

  Formellement, on peut l'énoncer de plusieurs (beaucoup) de façons équivalentes.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R}\ni 0\neq 1\in\mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R},\leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet :

Définition (objectif des prochains cours)

Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure :

$$\sqrt{2} := \sup\{r\in\mathbb{R} \;:\; r^2 < 2\}$$

L’ensemble des nombres réels

L’ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(l’addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R}\ni 0\neq 1\in\mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R},\leq)$ est totalement ordonné.
- L’ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet :

Définition alternative – 1

Toute suite décroissante et minorée de réels admet une limite réelle :

$$\sqrt{2} \coloneqq \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ où } \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet :

Définition alternative – 2

Le théorème des valeurs intermédiaires est valide pour les fonctions réelles.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2$ s'annule dans $]0, 2[$.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet :

Définition alternative – 3

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que

- $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$,
- $\mathbb{R} = A \cup B$,
- $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$

alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$.

Si on pose $A \coloneqq \{a \in \mathbb{R} \ : \ a^2 \leq 2$ ou $a \leq 0\}$ et $B \coloneqq \{b \in \mathbb{R} \ : \ b^2 > 2$ et $b \geq 0\}$ alors on obtient $\sqrt{2}$.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ $\quad$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet.

Remarques

- On admet l'existence et l'unicité,
- La multiplication est prioritaire sur l'addition : $x + yz = x + (yz)$,
- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x - y \coloneqq x + (-y)$,
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on note $\frac{x}{y} \coloneqq xy^{-1}$,
- Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x < y$ pour $(x \leq y$ et $x \neq y)$.

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$
13. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; de plus l'addition, la multiplication et l'ordre sur $\mathbb{Q}$ sont compatibles avec ceux de $\mathbb{R}$

Propriétés de l’ordre – 1

Propriétés de l’ordre – 1

1. $1 > 0$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{c} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{c} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$
15. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$
15. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$
16. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$
17. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x < y \Leftrightarrow xz < yz$
18. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$
19. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$
15. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$
16. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$
17. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x < y \Leftrightarrow xz < yz$
18. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$
19. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x < y \Leftrightarrow xz > yz$
20. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

Propriétés de l’ordre – 2

Proposition

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\left.\begin{array}{c} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \leq y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = y_i.$$

Propriétés de l'ordre – 2

Proposition

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\left.\begin{array}{c} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \leq y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = y_i.$$

Corollaire

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, alors

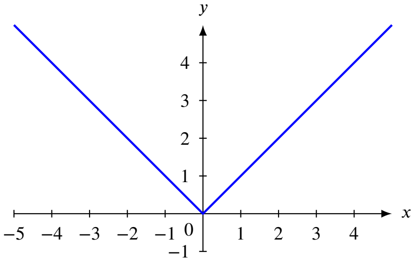
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0.$$

Valeur absolue – 1

Définition : valeur absolue

On définit la fonction *valeur absolue* par

$$|\bullet| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$



Graphe de $y = |x|$.

Valeur absolue – 2

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ ou $x = -y)$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
   (inégalité triangulaire)
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
   (inégalité triangulaire inversée)

Valeur absolue – 2

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ ou $x = -y)$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
   (inégalité triangulaire)
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
    (inégalité triangulaire inversée)

Proposition

Soient $a, x \in \mathbb{R}$, alors :

1. Si $a \geq 0$ alors $|x| = a \Leftrightarrow (x = a$ ou $x = -a)$
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a$ ou $x \leq -a)$
5. $|x| > a \Leftrightarrow (x > a$ ou $x < -a)$

Minorants, majorants

Définition : majorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

Minorants, majorants

Définition : majorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

Définition : minorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est **un** *minorant* de A si $\forall x \in A,\ m \leq x$.

Définition : partie minorée/majorée/bornée

- Une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant).
- Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Minorants, majorants

Définition : majorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

Définition : minorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est **un** *minorant* de A si $\forall x \in A,\ m \leq x$.

Définition : partie minorée/majorée/bornée

- Une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant).
- Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Exercice

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. Écrire formellement à l'aide de quantificateurs que A est majorée.
2. Écrire formellement à l'aide de quantificateurs que A n'est pas majorée.

Borne supérieure – 1

Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.
On dit que S est **la** *borne supérieure* (ou **le** *supremum*) de A si S est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ x \leq S$,
2. si T est un majorant de A alors $S \leq T$.

On note alors $\sup(A) = S$.

Proposition : unicité de la borne supérieure

Si une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors cette dernière est unique.

Borne supérieure – 1

Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.
On dit que S est **la** *borne supérieure* (ou **le** *supremum*) de A si S est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ x \leq S$,
2. si T est un majorant de A alors $S \leq T$.

On note alors $\sup(A) = S$.

Proposition : unicité de la borne supérieure

Si une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors cette dernière est unique.

Démonstration. Supposons que S_1 et S_2 soient deux bornes supérieures d'une partie $A \subset \mathbb{R}$.
Puisque S_2 est un majorant de A et que S_1 est le plus petit des majorants, on a $S_1 \leq S_2$.
De même, $S_2 \leq S_1$ et donc $S_1 = S_2$. ∎

Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.
On dit que S est **la** *borne supérieure* (ou **le** *supremum*) de A si S est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ x \leq S$,
2. si T est un majorant de A alors $S \leq T$.

On note alors $\sup(A) = S$.

Proposition : unicité de la borne supérieure

Si une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors cette dernière est unique.

De façon similaire, on appelle *borne inférieure* (ou *infimum*) d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ le plus grand des minorants de A. Si A admet une borne inférieure alors cette dernière est unique.

Borne supérieure – 2

Axiome : $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

Borne supérieure – 2

Axiome : $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

L'hypothèse *non-vide* est très importante !
Quels sont les majorants et minorants de $\varnothing$?

Borne supérieure – 2

Axiome : $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

L'hypothèse *non-vide* est très importante !
Quels sont les majorants et minorants de $\varnothing$?

Convention

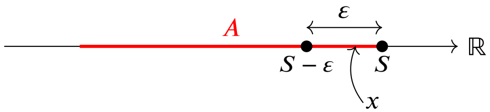
On note $\sup A = +\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-majorée.
On note $\inf A = -\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-minorée.

Borne supérieure – 3

Proposition : caractérisation du supremum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$, alors

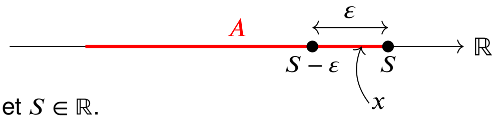
$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$



Proposition : caractérisation du supremum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$, alors

$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$



Démonstration. Soient $A \subset R$ et $S \in \mathbb{R}$.

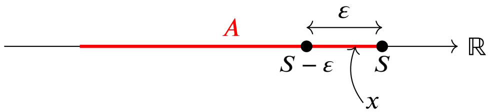
- $\Rightarrow$: supposons que $S = \sup(A)$. Alors S est un majorant de A et donc $\forall x \in A,\ x \leq S$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors $S - \varepsilon < S$ et donc $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant : il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$.
- $\Leftarrow$: supposons que $\forall x \in A,\ x \leq S$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x$.
  La première condition stipule que S est un majorant de A.
  Montrons qu'il s'agit du plus petit par contraposée : si $T < S$ alors T n'est pas un majorant.
  Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $T < S$. Posons $\varepsilon \coloneqq S - T > 0$. Alors il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x$, i.e. $T < x$.
  Donc T n'est pas un majorant. ■

Borne supérieure – 3

Proposition : caractérisation du supremum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$, alors

$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$



Proposition : caractérisation de l'infimum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $I \in \mathbb{R}$, alors

$$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ I \leq x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < I + \varepsilon \end{cases}$$

Intervalles

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R},\ (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Lemme

Soit I un intervalle non-vide alors :

- Si I est minoré et majoré alors $\left]\inf(I), \sup(I)\right[\subset I \subset \left[\inf(I), \sup(I)\right]$;

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Lemme

Soit I un intervalle non-vide alors :

- Si I est minoré et majoré alors $\left]\inf(I), \sup(I)\right[\subset I \subset \left[\inf(I), \sup(I)\right]$;

Démonstration. Supposons que I soit un intervalle non-vide minoré et majoré.
Soit $x \in I$ alors $\inf(I) \leq x \leq \sup(I)$. Donc $I \subset \left[\inf(I), \sup(I)\right]$.
Soit $x \in \left]\inf(I), \sup(I)\right[$.
Puisque $x > \inf(I)$, x n'est pas un minorant de I et il existe donc $y \in I$ tel que $y < x$.
Puisque $x < \sup(I)$, x n'est pas un majorant de I et il existe donc $z \in I$ tel que $x < z$.
On a ainsi $y < x < z$ avec $y, z \in I$, donc $x \in I$ puisque I est un intervalle.
On a bien montré que $\left]\inf(I), \sup(I)\right[\subset I$. ∎

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Lemme

Soit I un intervalle non-vide alors :

- Si I est minoré et non-majoré alors $\left]\inf(I), +\infty\right[\subset I \subset \left[\inf(I), +\infty\right[$;

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Lemme

Soit I un intervalle non-vide alors :

- Si I est minoré et non-majoré alors $\left]\inf(I), +\infty\right[\subset I \subset \left[\inf(I), +\infty\right[$;

Démonstration. Supposons que I soit un intervalle non-vide minoré et non-majoré.
Soit $x \in I$ alors $\inf(I) \leq x$. Donc $I \subset \left[\inf(I), +\infty\right[$.
Soit $x \in \left]\inf(I), +\infty\right[$.
Puisque $x > \inf(I)$, x n'est pas un minorant de I et il existe donc $y \in I$ tel que $y < x$.
Puisque I n'est pas majoré, il existe $z \in I$ tel que $x < z$.
On a ainsi $y < x < z$ avec $y, z \in I$, donc $x \in I$ puisque I est un intervalle.
On a bien montré que $\left]\inf(I), +\infty\right[\subset I$. ∎

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R},\ (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Lemme

Soit I un intervalle non-vide alors :

- Si I est minoré et majoré alors $\left]\inf(I), \sup(I)\right[\subset I \subset \left[\inf(I), \sup(I)\right]$;
- Si I est minoré et non-majoré alors $\left]\inf(I), +\infty\right[\subset I \subset \left[\inf(I), +\infty\right[$;
- Si I est non-minoré et majoré alors $\left]-\infty, \sup(I)\right[\subset I \subset \left]-\infty, \sup(I)\right]$;
- Si I est non-minoré et non-majoré alors $I =]-\infty, +\infty[$.

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Corollaire

Les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme suivante, où $a < b$:

- $\varnothing$
- $[a, a] = \{a\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > A.$

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > A.$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$.
Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, n\varepsilon \leq A$.
Alors $E \coloneqq \{n\varepsilon \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ est non-vide et majoré.
Ainsi $M \coloneqq \sup E$ est bien défini.
Puisque $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > M - \varepsilon$.
Ainsi $(n+1)\varepsilon > M$, d'où une contradiction. ∎

$\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > A.$

Le résultat ci-dessus stipule qu'il n'existe pas de nombre réel infinitésimal (i.e. infiniment petit ou infiniment grand).

$\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall A > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > A.$

Le résultat ci-dessus stipule qu'il n'existe pas de nombre réel infinitésimal (i.e. infiniment petit ou infiniment grand).

Corollaire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > A.$

Le résultat ci-dessus stipule qu'il n'existe pas de nombre réel infinitésimal (i.e. infiniment petit ou infiniment grand).

Corollaire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

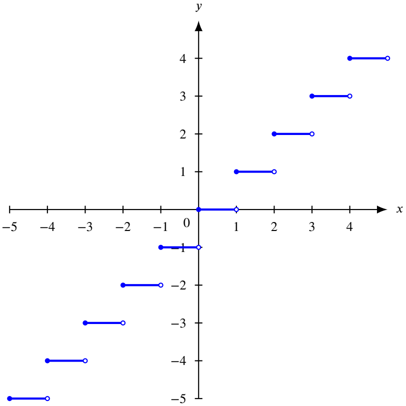
Corollaire

$\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.



Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence lorsque $x \geq 0$.
Posons $E \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \;:\; x < n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $E \neq \varnothing$.
Donc $p \coloneqq \min(E)$ est bien défini *(car $\mathbb{N}$ est bien ordonné)*.
Puisque $p \in E$, on a $x < p$.
Puisque $p-1 \in \mathbb{N}$ et $p-1 \notin E$, on a $p-1 \leq x$.
Donc $n \coloneqq p-1 \in \mathbb{Z}$ vérifie $n \leq x < n+1$.

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence lorsque $x \geq 0$.
Posons $E \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ x < n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $E \neq \varnothing$.
Donc $p \coloneqq \min(E)$ est bien défini *(car $\mathbb{N}$ est bien ordonné)*.
Puisque $p \in E$, on a $x < p$.
Puisque $p-1 \in \mathbb{N}$ et $p-1 \notin E$, on a $p-1 \leq x$.
Donc $n \coloneqq p-1 \in \mathbb{Z}$ vérifie $n \leq x < n+1$.

Existence lorsque $x < 0$.
Posons $F \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ -x \leq n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $F \neq \varnothing$.
Donc $q \coloneqq \min(F)$ est bien défini.
Puisque $q \in F$, on a $-x \leq q$.
Puisque $q-1 \in \mathbb{N}$ et $q-1 \notin F$, on a $q-1 < -x$.
Donc $n \coloneqq -q \in \mathbb{Z}$ vérifie $n \leq x < n+1$.

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence lorsque $x \geq 0$.
Posons $E \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ x < n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $E \neq \varnothing$.
Donc $p \coloneqq \min(E)$ est bien défini *(car $\mathbb{N}$ est bien ordonné)*.
Puisque $p \in E$, on a $x < p$.
Puisque $p-1 \in \mathbb{N}$ et $p-1 \notin E$, on a $p-1 \leq x$.
Donc $n \coloneqq p-1 \in \mathbb{Z}$ vérifie $n \leq x < n+1$.

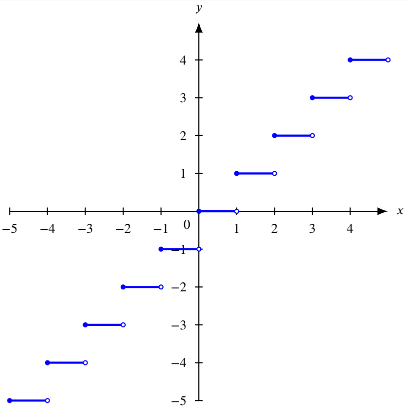
Existence lorsque $x < 0$.
Posons $F \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ -x \leq n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $F \neq \varnothing$.
Donc $q \coloneqq \min(F)$ est bien défini.
Puisque $q \in F$, on a $-x \leq q$.
Puisque $q-1 \in \mathbb{N}$ et $q-1 \notin F$, on a $q-1 < -x$.
Donc $n \coloneqq -q \in \mathbb{Z}$ vérifie $n \leq x < n+1$.

Unicité. Supposons que $n, n' \in \mathbb{Z}$ vérifient $n \leq x < n+1$ et $n' \leq x < n'+1$.
Alors $n - n' - 1 < 0 < n - n' + 1$ d'où $-1 < n' - n < 1$.
Puisque $n' - n \in \mathbb{Z}$, on a $n - n' = 0$, i.e. $n' = n$. ∎

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.



Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

Corollaire

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Théorème

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 1 : par le théorème fondamental de l'arithmétique.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
Alors $2b^2 = a^2$.
La décomposition primaire de $2b^2$ contient un nombre impair de facteurs premiers (comptés avec les exposants) alors que la décomposition primaire a^2 contient un nombre pair de facteurs premiers (comptés avec les exposants).
D'où une contradiction avec l'unicité de la factorisation en facteurs premiers. ■

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 2 : par le lemme d'Euclide.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

Alors $2b^2 = a^2$ d'où $2|a^2$.

D'après le lemme d'Euclide, $2|a$ et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.

Puis $2b^2 = a^2 = 4k^2$, i.e. $b^2 = 2k^2$.

Donc $2|b^2$ et ainsi $2|b$, toujours d'après le lemme d'Euclide.

Donc $2| \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$; d'où une contradiction. ■

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 3 : par le lemme de Gauss.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.
Alors $2b^2 = a^2$ d'où $b | a^2$.
Puisque $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, on déduit du lemme de Gauss que $b | 1$ et donc $b = 1$.
Ainsi $a^2 = 2$, or

- si $a \equiv 0 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 0 \mod 3$,
- si $a \equiv 1 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \mod 3$ et
- si $a \equiv 2 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \mod 3$.

D'où une contradiction. $\blacksquare$

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 4 : par congruence.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

- Premier cas : si $a \equiv 0 \mod 3$ et $b \equiv 0 \mod 3$, alors $3 | \mathrm{pgcd}(a, b) = 1$,
- Deuxième cas : si $a \equiv \pm 1 \mod 3$ et $b \equiv 0 \mod 3$, alors $0 = a^2 - 2b^2 \equiv 1 \mod 3$,
- Troisième cas : si $a \equiv 0 \mod 3$ et $b \equiv \pm 1 \mod 3$, alors $0 = a^2 - 2b^2 \equiv 1 \mod 3$,
- Quatrième cas : si $a \equiv \pm 1 \mod 3$ et $b \equiv \pm 1 \mod 3$, alors $0 = a^2 - 2b^2 \equiv 2 \mod 3$.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. ■

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 5 : par le principe du bon ordre.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
Alors $E \coloneqq \left\{ n \in \mathbb{N} \ : \ n\sqrt{2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ est non-vide puisque $b \in E$ ($b\sqrt{2} = a \in \mathbb{N}$).
Puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné, E admet un plus petit élément $p \coloneqq \min(E)$.
On sait que $p\sqrt{2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et on pose $q \coloneqq p\sqrt{2} - p$. Alors $q \in \mathbb{Z}$.
De plus $q = p(\sqrt{2} - 1)$ de sorte que $0 < q < p$.
Mais $q\sqrt{2} = 2p - p\sqrt{2} = p - q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donc $q \in E$.
D'où une contradiction puisque $q \in E$ et $q < p = \min(E)$. ∎

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 6 : par la propriété archimédienne.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n \coloneqq \left(\sqrt{2}-1\right)^n$.

En utilisant la formule du binôme de Newton (ou une récurrence), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $u_n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on déduit de $2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$ que $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$.

Donc $0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Supposons par contradiction que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$ alors

$$u_n = a_n + b_n\sqrt{2} = a_n + b_n\frac{p}{q} = \frac{qa_n + pb_n}{q}.$$

Puisque $u_n > 0$, on a $|qa_n + pb_n| \geq 1$ et $u_n \geq \frac{1}{q}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{q} \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Ce qui contredit la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$ (ou que $\lim \frac{1}{2^n} = 0$). ∎

Démonstration 7 : par descente infinie.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.

Alors $a^2 = 2b^2$, d'où $a(a-b) = a^2 - ab = 2b^2 - ab = b(2b-a)$.

Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.

Puisque $1 < \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, on a $0 < a - b$. Et ainsi $0 < 2b - a$, d'où $a - b < b$.

En répétant ce processus, on obtient $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots$ où $a_k > 0$ et $0 < b_{k+1} < b_k$.

Ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. ∎

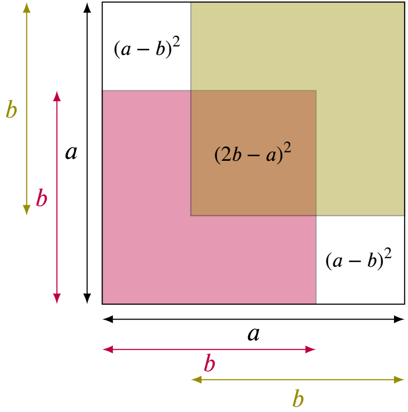
Démonstration 8 : une version géométrique de la descente infinie.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.

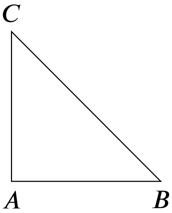
Alors $a = \sqrt{2}b > b$.
L'aire du carré au centre est $\mathcal{A} = (2b - a)^2$.
De plus, par inclusion-exclusion, $2(a-b)^2 + 2b^2 - \mathcal{A} = a^2$.
Donc $\mathcal{A} = 2(a-b)^2 + 2b^2 - a^2 = 2(a-b)^2$ puisque $a^2 = 2b^2$.

Ainsi $2(a-b)^2 = \mathcal{A} = (2b-a)^2$, d'où $2 = \dfrac{(2b-a)^2}{(a-b)^2}$.

Donc $\sqrt{2} = \dfrac{2b-a}{a-b}$ avec $0 < 2b - a$ et $0 < a - b < b$.
En répétant ce processus, on construit une suite infinie de fractions $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots$ où $a_k > 0$ et $0 < b_{k+1} < b_k$.
Ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. ■



Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).
Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.

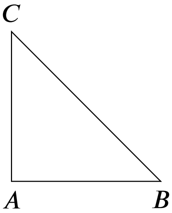


Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.



Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

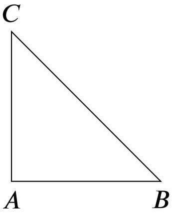
Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.

En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.

Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.



Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.

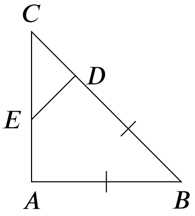
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.

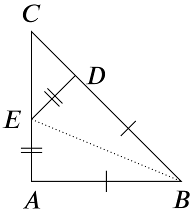
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.

En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.

Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.

Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.

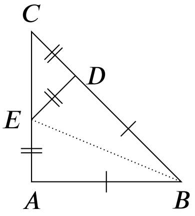




Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

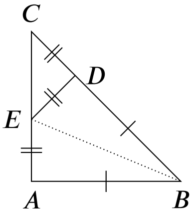
Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore.

Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

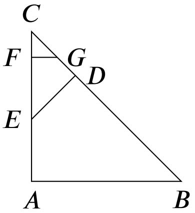


Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore.
De plus le triangle CDE est isocèle (considérer les angles) et rectangle en A donc $\overline{ED} = \overline{DC}$.

Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).



Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore.
De plus le triangle CDE est isocèle (considérer les angles) et rectangle en A donc $\overline{ED} = \overline{DC}$.
Ainsi $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AB}$ et $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AB} - (\overline{BC} - \overline{AB}) = 2\overline{AB} - \overline{BC}$ sont multiples entiers de d.



Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore.
De plus le triangle CDE est isocèle (considérer les angles) et rectangle en A donc $\overline{ED} = \overline{DC}$.
Ainsi $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AB}$ et $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AB} - (\overline{BC} - \overline{AB}) = 2\overline{AB} - \overline{BC}$ sont multiples entiers de d.
Puisque DEC est isocèle et rectangle en D, on peut répéter cette construction avec le triangle DEC de sorte à construire une suite infinie de segment $(AC, EC, FC, \ldots)$ multiples entiers de d dont la longueur diminue. Ce qui est impossible. ∎

Quelques nombres irrationnels : e

Théorème

$$e \notin \mathbb{Q}$$

Quelques nombres irrationnels : e

Première démonstration.

On (r)appelle que $e \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Supposons par l'absurde que $e = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Alors $b > 1$ puisque $e \notin \mathbb{N}$.

De plus,

$$b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b!\left(\sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}\right).$$

On obtient une contradiction en remarquant que le terme de gauche est un entier alors que le terme de droite n'en est pas un, en effet :

$$0 < b!\left(\sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(b+1)^n} = \frac{1}{b} < 1.$$

∎

Deuxième démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n \coloneqq \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.

Par récurrence et en utilisant la formule d'intégration par parties, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $u_n = a_n + e b_n$.

Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Alors $0 < u_n = a_n + b_n \dfrac{p}{q} = \dfrac{q a_n + p b_n}{q}$.

Puisque $u_n > 0$, on a que $q a_n + p b_n \geq 1$ et que $u_n \geq \dfrac{1}{q}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{q} \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e \mathrm{d}x = \dfrac{e}{n+1}$.

D'où une contradiction en faisant tendre n vers l'infini. ∎

Exercice

Montrer qu'il existe $a, b > 0$ irrationnels tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
Posons $\varepsilon \coloneqq y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m \coloneqq \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ∎

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
Posons $\varepsilon := y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m := \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ∎

Corollaire

Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
Posons $\varepsilon \coloneqq y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m \coloneqq \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ■

Corollaire

Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Démonstration. Puisque I n'est pas vide et n'est pas un singleton, il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
Puisque I est un intervalle, on a que $q \in I$.
Ainsi $q \in I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. ■

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$$

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
D'après la diapositive précédente, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
De même, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < q$.
Ainsi, on $p, q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x < p < q < y$.
Posons $s := p + \frac{\sqrt{2}}{2}(q - p)$.
Alors $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sinon on aurait $\sqrt{2} = 2\dfrac{s-p}{q-p} \in \mathbb{Q}$.
De plus, $p < s < q$ puisque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
On a bien construit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < s < y$. ■

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
D'après la diapositive précédente, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
De même, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < q$.
Ainsi, on $p, q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x < p < q < y$.
Posons $s := p + \frac{\sqrt{2}}{2}(q - p)$.
Alors $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sinon on aurait $\sqrt{2} = 2\frac{s-p}{q-p} \in \mathbb{Q}$.
De plus, $p < s < q$ puisque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
On a bien construit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < s < y$. ∎

Corollaire

Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.