Université d'Angers – 2023/2024

Espaces complets

CC du 17 juin 2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions précédentes d'un exercice même si vous ne les avez pas réussies.

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Exercice 1.

1. On considère l'espace vectoriel $\ell^\infty := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$ muni de la norme $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
   La boule unité fermée est-elle compacte ?
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que si $F \subset E$ est une partie finie alors F est compacte.

Exercice 2. Soit $E := \mathbb{R}[X]$.

1. On définit $N_1 : E \to \mathbb{R}$ par $N_1\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) := \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$.
   Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. Montrer que $X^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ pour la norme N_1.
3. On définit $N_2 : E \to \mathbb{R}$ par $N_2\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) := \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$.
   Montrer que N_2 est une norme sur E.
4. Montrer que $X^n \xrightarrow{n\to+\infty} 1$ pour la norme N_2.
5. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel $C^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $F_n \in E$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.
   On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F \in E$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que E est complet.
3. On considère l'application $T : E \to E$ définie par

$$\forall f \in E,\ T(f) : x \in [0,1] \mapsto 1 + \int_0^x f\left(t - t^2\right)\ \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

   (a) Montrer que T^2 est une contraction.
   Indice : on pourra commencer par montrer que $\forall t \in [0,1], t - t^2 \leq \frac{1}{4}$.
   (b) En déduire que T a un unique point fixe puis qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y\left(t - t^2\right) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$