Université d'Angers – 2023/2024

Espaces complets

CC du 5 avril 2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions précédentes d'un exercice même si vous ne les avez pas réussies.

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Exercice 1.

1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
   Donner *deux* caractérisations (i.e. conditions nécessaires et suffisantes) pour que A soit une partie compacte de E.
   Les caractérisations doivent être indépendantes de la dimension de E.
2. Existe-t-il un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ non-trivial (c'est-à-dire différent de $\{0\}$) dont la boule unité ouverte $B(0,1)$ soit une partie complète ? Si oui, donner un exemple en le justifiant, si non, le démontrer.
3. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On considère $f : E \to F$ une application linéaire.
   Donner deux caractérisations de la continuité de f.

Exercice 2.

On considère l'espace vectoriel $C^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
Pour $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$ est un espace de Banach.
3. On cherche à montrer qu'il existe une unique fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{1}{14}\int_0^x s^2 \sin(f(s))ds.$$

   (a) Pour $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose

$$T(f) : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{14}\displaystyle\int_0^x s^2 \sin(f(s))ds \end{array}.$$

   Montrer que cela définit bien une fonction $T : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to C^0([0,1], \mathbb{R})$.

   (b) Montrer que T est contractante.

   (c) Conclure.

Exercice 3.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F une partie non-vide de E. Pour $x \in E$, on pose :

$$d(x, F) := \inf_{y\in F} \|x - y\|$$

1. Montrer que $d(\cdot, F) : \begin{array}{ccc} E & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x,F) \end{array}$ est bien définie.
2. Montrer que si $G \subset F$ alors $\forall x \in E,\ d(x, G) \geq d(x, F)$.
3. Montrer que si F est une partie compacte alors $\forall x \in E, \exists y \in F,\ d(x, F) = \|x - y\|$.
4. Montrer que $\forall x \in E, d(x, F) = d(x, \overline{F})$.
5. (a) On suppose que F est une partie fermée.
   Montrer que $\forall x \in E,\ d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

   (b) En déduire que l'application entre les parties fermées non-vides de E et les applications $E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \{F \subset E \ : \ F \neq \emptyset \text{ et } F \text{ fermé}\} & \to & \mathbb{R}^E \\ F & \mapsto & d(\cdot, F) \end{array}$$

   est injective.
6. Montrer que $d(\cdot, F)$ est lipschitzienne de constante 1 (sans hypothèse supplémentaire sur F).