Théorie des anneaux

Feuille de TD n°3

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif.

- Soit $f \in A[X] \setminus \{0\}$.
Montrer que f est un diviseur de zéro si et seulement s'il existe $d \in A \setminus \{0\}$ tel que $df = 0$.
- Soit $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \in A[X]$.
 - Montrer que $f \in \text{Nil}(A[X])$ si et seulement si $a_0, a_1, \dots, a_n \in \text{Nil}(A)$.
 - Montrer que $f \in (A[X])^*$ si et seulement si $a_0 \in A^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \text{Nil}(A)$.
Pour les deux questions précédentes, on pourra utiliser l'Exercice 10 du TD n°2.
- Montrer que si A est intègre alors $(A[X])^* = A^*$ et $\text{Nil}(A[X]) = \{0\}$.
 - Le résultat précédent est-il vrai pour un anneau commutatif non-trivial quelconque ?
- Soient $f, g \in A[X]$.
On suppose que $g \neq 0$ et que le coefficient dominant de g est inversible dans A .
Montrer qu'il existe $q, r \in A[X]$ uniquement déterminés par $f = qg + r$ et $\deg(r) < \deg(g)$.
On appelle q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de f par g .
 - Soient $f \in A[X]$ et $a \in A$.
Montrer que a est une racine de f si et seulement s'il existe $g \in A[X]$ tel que $f = (X - a)g$.
 - On suppose maintenant que A est un anneau commutatif non-trivial.
Montrer que A est intègre si et seulement tout polynôme non-nul $f \in A[X]$ possède au plus $\deg(f)$ racines.

Exercice 2.

- Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(2) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
- On considère $A := \mathbb{Z}[X]/(2(X^2 - 1))$.
 - Montrer que les inversibles de A sont $\bar{1}$ et $\overline{-1}$.
 - Montrer que $\bar{2}$ et $\overline{2X}$ sont associés.
 - Montrer qu'il n'existe pas $u \in A^*$ tel que $\overline{2X} = \bar{2}u$.
 - Y-a-t'il une contradiction avec un résultat du cours disant que deux éléments sont associés si et seulement s'ils sont multiples l'un de l'autre par un inversible ?

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif.

- Montrer que si $\pi \in A$ est irréductible et si $u \in A^*$ est inversible alors $u\pi$ est irréductible.
- Soient $\pi, \pi' \in A$ deux éléments associés de A . Montrer que π est irréductible si et seulement si π' l'est.
Attention : l'anneau A n'est pas supposé intègre.

Exercice 4.

- Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un anneau noëtherien non-intègre n'admettant pas d'irréductible.
- Montrer que $(\bar{2})$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
- Y-a-t'il une contradiction avec un résultat du cours disant que π est irréductible si et seulement si (π) est premier non-nul ? Une des implications est-elle vraie pour tout anneau intègre ?
- Montrer qu'aucun élément non-nul et non-inversible de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ s'écrit comme le produit d'un inversible et d'irréductibles.

Exercice 5. Soit A un anneau intègre.

- Montrer que si $a, b \in A$ ont un pgcm alors ils ont un pgcd.
- La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer 2 et $1 + i\sqrt{3}$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif non-trivial. On suppose qu'il existe $N : A \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

- $\forall a \in A, N(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
 - $\forall a \in A, N(a) = 1 \Leftrightarrow a \in A^*$
 - $\forall a, b \in A, N(ab) = N(a)N(b)$
- Montrer par récurrence sur $N(a)$ que tout élément $a \in A \setminus \{0\}$ s'écrit de la forme $a = u\pi_1 \dots \pi_n$ où $u \in A^*$ et où les π_k sont irréductibles.
 - Cette écriture est-elle nécessairement unique ?

- Exercice 7.** 1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien pour le stathme $v(z) := |z|^2$.
 2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien pour le stathme $v(a + b\sqrt{2}) := |a^2 - 2b^2|$.

Exercice 8. Soit $A := \mathbb{Z}[i]$ et $N : A \rightarrow \mathbb{N}$ défini par $N(z) := |z|^2$.

1. (a) Montrer que $\forall z \in A, z \in A^* \Leftrightarrow N(z) = 1$.
 (b) En déduire que $A^* = \{\pm 1, \pm i\}$.
2. On dénote $\Sigma := \{n \in \mathbb{N} : \exists a, b \in \mathbb{N}, n = a^2 + b^2\}$.
 (a) Montrer que si $n, m \in \Sigma$ alors $nm \in \Sigma$.
 (b) Soit p un nombre premier.
 - i. Montrer que $p \in \Sigma$ si et seulement si p n'est pas un irréductible de A .
 - ii. Montrer que $A/(p) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1, p) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(X^2 + \bar{1})$.
 - iii. En déduire que p n'est pas irréductible dans A si et seulement si -1 est un carré modulo p si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.
 - iv. Montrer que $p \in \Sigma$ si et seulement si p n'est pas un irréductible de A .
- (c) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que $n \in \Sigma$ ssi $v_p(n)$ est pair pour tout premier $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Exercice 9. Soit $A := \mathbb{Z}[i]$ et $N : A \rightarrow \mathbb{N}$ défini par $N(z) := |z|^2$.

1. Expliciter $\{z \in A : N(z) \leq 10\}$.
2. (a) Montrer que $\forall z, w \in A, z|w \implies N(z)|N(w)$.
 (b) Étudier la réciproque.
3. Les éléments 2 et 3 sont-ils des irréductibles de A ?
4. (a) Soit $z \in A$. Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier alors z est un irréductible.
 (b) Étudier la réciproque.
5. Les éléments $2 + i$ et $2 - i$ sont-ils des irréductibles de A ?
6. Lister les éléments $z \in A$ irréductibles vérifiant $N(z) \leq 10$.
7. (a) Décomposer $10, 1 + 5i, 6 + 8i$ et $-13 + 9i$ en produit de facteurs irréductibles.
 (b) En déduire un pgcd et un ppcm de $1 + 5i$ et $6 + 8i$.
8. Cette question est indépendante : déterminer un pgcd, un ppcm et une relation de Bézout de $5 - i$ et $4 + 7i$.

Exercice 10. On se place dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

1. Pour chacun des couples suivants, déterminer un pgcd, un ppcm et une relation de Bézout.
 (a) $X^3 + X + 4$ et $X^2 + X + 2$ (b) $X^5 + 2X^3 + X^2 + X + 1$ et $X^4 - 1$
2. Les anneaux suivants sont-ils des corps? Si oui, les identifier à un corps plus simple.
 (a) $\mathbb{R}[X]/(X^3 + X + 4)$ (b) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 2)$

Exercice 11. Soit $A := \{P \in \mathbb{Q}[X] : P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que A est un anneau intègre contenant X^2 et X^3 .
2. Déterminer A^* .
3. A-t-on $X^2|X^3$ dans A ?
4. Montrer que X^2 et X^3 sont irréductibles et non-associés dans A .
5. Exhiber un élément de A admettant deux décompositions distinctes en facteurs irréductibles.
6. L'idéal (X^2) de A est-il premier?
7. Montrer que l'idéal $I := (X^2, X^3)$ de A n'est pas principal.
8. Montrer que les diviseurs unitaires communs à X^5 et X^6 dans A sont 1, X^2 et X^3 .
9. En déduire que X^5 et X^6 n'ont pas de pgcd.
10. Justifier de 4 façons différentes que A n'est pas un anneau principal.
11. Montrer que tout élément $P \in A$ s'écrit sous la forme $P = a_0 + a_3X^3 + X^2Q$ où $Q \in A$ et $a_0, a_3 \in \mathbb{Q}$.
12. Identifier l'anneau A/I avec un anneau plus simple.
13. I est-il un idéal maximal de A ?

Exercice 12. Soit A un anneau. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est un corps, (ii) $A[X]$ est euclidien, (iii) $A[X]$ est principal.

Exercice 13. Soit A un anneau de Bézout, i.e. un anneau intègre où tout idéal finiment engendré est principal.

1. Montrer que deux éléments quelconques de A ont un pgcd.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 (i) A est noethérien, (ii) A est un anneau principal, (iii) A est factoriel.