Université d'Angers – 2023/2024

Théorie des anneaux

Feuille de TD n°2

Exercice 1. *Le but de cet exercice est de démontrer le deuxième théorème d'isomorphisme.*
Soient A un anneau, B un sous-anneau de A et I un idéal de A.

1. Montrer que $B + I$ est un sous-anneau de A.
2. Montrer que $B \cap I$ est un idéal de B.
3. Montrer que I est un idéal de $B + I$.
4. Montrer que les anneaux $B/B \cap I$ et $(B + I)/I$ sont isomorphes.

Exercice 2.

1. Soient A un anneau commutatif, B un sous-anneau de A et $\omega \in A$. On pose $B[\omega] := \{P(\omega) \ : \ P \in B[X]\}$.
   Montrer que $B[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de A contenant B et ω.
2. On considère maintenant $A = \mathbb{C}$ et $B = \mathbb{Z}$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant ω.
   (b) On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $d \geq 1$ tel que $P(\omega) = 0$.
   Montrer que $\mathbb{Z}[\omega] = \left\{a_{d-1}\omega^{d-1} + \cdots + a_1\omega + a_0 \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}\right\}$.
   (c) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas P unitaire ?

Exercice 3.
Soient A un anneau à division, B un anneau et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que si B n'est pas trivial alors f est injectif.
2. Que se passe-t-il si B est trivial ?

Exercice 4.

1. Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.
On considère $I := (2, X)$ l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2 et par X.

1. Montrer que $I = \{P \in \mathbb{Z}[X] \ : \ P(0) \equiv 0 \mod 2\}$.
2. Est-ce que I est un idéal principal ?

Exercice 6.
L'idéal I de A est-il premier ? maximal ?

1. $A = \mathbb{Q}[X]$, $I = (X^2 - 2)$
2. $A = \mathbb{Z}[X]$, $I = (X^2 - 2)$
3. $A = \mathbb{R}[X]$, $I = (X^2 - 2)$
4. $A = \mathbb{R}[X]$, $I = (X - 2)$
5. $A = \mathbb{R}[X]$, $I = (X^2 + 1)$
6. $A = \mathbb{C}[X]$, $I = (X^2 + 1)$
7. $A = \mathbb{Z}[i]$, $I = (1 + i)$
8. $A = \mathbb{Z}[X]$, $I = (n, X)$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Exercice 7.
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. Soient B un anneau et A un sous-anneau de B.
   Si I est un idéal premier de B alors $I \cap A$ est un idéal premier de A.
2. Soient B un anneau et A un sous-anneau de B.
   Si I est un idéal maximal de B alors $I \cap A$ est un idéal maximal de A.
3. Soit $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux.
   Si I est un idéal premier de B alors $f^{-1}(I)$ est un idéal premier de A.
4. Soit $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux.
   Si I est un idéal maximal de B alors $f^{-1}(I)$ est un idéal maximal de A.

Exercice 8.
Soit A un anneau de Boole (voir l'Exercice 8 de la feuille de TD n°1).

1. Montrer que si I est un idéal de A alors A/I est un anneau de Boole.
2. (a) Montrer que si I est un idéal premier de A alors $A/I \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que tout idéal premier de A est maximal.
   (c) Soit I un idéal premier. Montrer que $\forall x, y \in A \setminus I,\ x + y \in I$.
3. Montrer que tout idéal de A finiment engendré est principal.
   Indice : on pourra considérer un raisonnement par récurrence sur le nombre de générateurs.

Exercice 9.

1. Soit A un anneau principal. Montrer que tout idéal premier non-nul de A est maximal.
2. L'énoncé est-il vrai si A est un anneau quelconque ?

Exercice 10.
Soit A un anneau. On dit que $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $a^n = 0$.
On dénote l'ensemble des nilpotents de A par $\mathrm{Nil}(A)$.

1. Montrer qu'un nilpotent non-nul est un diviseur de 0.
2. Montrer que si $a \in \mathrm{Nil}(A)$ alors $-a \in \mathrm{Nil}(A)$.
3. Montrer que si $a \in \mathrm{Nil}(A)$ alors $1 + a$ et $1 - a$ sont inversibles.
4. On suppose désormais que A est commutatif.
   (a) Montrer, de deux façons différentes, que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.
   (b) Montrer que $\overline{0}$ est le seul nilpotent de $A/\mathrm{Nil}(A)$.
   (c) Montrer que $\forall u \in A^*$, $\forall a \in \mathrm{Nil}(A)$, $u + a \in A^*$ et $u - a \in A^*$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A.

Exercice 11.
Soit A un anneau commutatif.
Montrer que $A \setminus A^*$ est la réunion des idéaux maximaux de A.

Exercice 12.
Soit A un anneau commutatif non-trivial.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A possède un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$,
(ii) $A \setminus A^*$ est un idéal,
(iii) $\forall a \in A$, $a \in A^*$ ou $1 - a \in A^*$,
(iv) il existe un idéal maximal I tel que $\forall a \in I$, $1 - a \in A^*$.

On dit alors que A est un *anneau local* et que $A/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel de A.

Exercice 13.

1. Montrer que les idéaux $(X - 1)$ et $(X^2 + X + 1)$ sont comaximaux dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. On considère maintenant l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.
   (a) Montrer que $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \mapsto & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ P & \mapsto & P(1) \mod 3 \end{array}$ induit un isomorphisme d'anneaux
   $$\mathbb{Z}[X]/(X-1,3) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$
   (b) Montrer que $(X - 1, 3) = (X - 1, X^2 + X + 1)$.
   (c) Les idéaux $(X - 1)$ et $(X^2 + X + 1)$ sont-ils comaximaux ?
   (d) Montrer que le morphisme canonique $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]/(X-1)\times\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$ n'est pas surjectif.

Exercice 14.
Pour chacun des morphismes canoniques suivants, montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme et déterminer sa réciproque.

1. $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{R}[X]/(X^4 + X^2) \to \mathbb{R}[X]/(X^2) \times \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$