Théorie des anneaux

Feuille de TD n°1

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-anneaux de $\mathbb{Z}[X]$?

1. $\{P \in \mathbb{Z}[X] : \deg(P) \leq n\}$ où $n \in \mathbb{N}$
2. $\{P \in \mathbb{Z}[X] : \deg(P) \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{0\}$
3. $\{XQ : Q \in \mathbb{Z}[X]\}$
4. $\{P(X^2) : P \in \mathbb{Z}[X]\}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si $n < 0$, on note $\sqrt{n} := i\sqrt{-n}$.

1. Montrer que $\{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant $\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\sqrt{n}$.
3. (a) Montrer que si $n \equiv 1 \pmod{4}$ alors $\left\{a + \frac{1+\sqrt{n}}{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ est un anneau.

Indice : on pourra remarquer que $\frac{1+\sqrt{n}}{2}$ est solution d'un polynôme quadratique à coefficients entiers.

(b) Est-ce toujours vrai si $n \not\equiv 1 \pmod{4}$?

Exercice 3. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont intègres ?

1. $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Z}[i]$
3. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
5. $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 4.

1. Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'anneaux ?

- (a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$
- (b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ P & \mapsto & P'(0) \end{array}$

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $n, m \in \mathbb{N}$ pour qu'il existe un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

Exercice 6. Soit A un anneau.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\Theta : \mathbb{Z} \rightarrow A$.
2. Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(\Theta) = c\mathbb{Z}$.

Cet entier c , que l'on note $\text{car}(A)$, est appelé *la caractéristique* de A .

C'est le plus petit entier $c > 0$ tel que

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{c \text{ fois}} = 0,$$

s'il existe, et sinon $\text{car}(A) = 0$ (on dit alors que A est de *caractéristique nulle*).

3. Déterminer la caractéristique des anneaux suivants :

- (a) $\mathbb{Z}$
- (b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$
- (c) $\mathbb{Q}$
- (d) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- (e) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
- (f) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

4. Montrer que A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/\text{car}(A)\mathbb{Z}$.

5. On suppose dans cette question que $p := \text{car}(A)$ est un nombre premier.

- (a) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, p \mid \binom{p}{k}$.
- (b) Montrer que si $a, b \in A$ vérifient $ab = ba$ alors $(a+b)^p = a^p + b^p$.
- (c) En déduire que si A est commutatif alors $\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A \\ a & \mapsto & a^p \end{array}$ est un morphisme d'anneaux.

6. Montrer que si A est intègre alors $\text{car}(A)$ est soit nulle soit un nombre premier.

Exercice 7. Soit A un anneau.

1. Rappeler la définition de l'anneau $A[X]$.
2. Montrer que A est commutatif si et seulement si $A[X]$ l'est.
3. On suppose que A est un anneau commutatif non trivial.
 - (a) Montrer que si le coefficient dominant de $g \in A[X] \setminus \{0\}$ n'est pas un diviseur de zéro dans A alors $\forall f \in A[X], \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
 - (b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) $A[X]$ est intègre
 - (ii) A est intègre
 - (iii) $\forall f, g \in A[X], \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

Exercice 8. Soit A un anneau de Boole, i.e. vérifiant $\forall a \in A, a^2 = a$.

1. Montrer $\forall a \in A, 2a = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Montrer que 0 est le seul élément nilpotent de A .
4. Montrer que 1 est le seul élément inversible de A .
5. On suppose que A est intègre, déterminer A .

Exercice 9. Soit E un ensemble.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^E$ est un anneau de Boole.
2. Montrer que $\varphi : \begin{matrix} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^E & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ f & \mapsto & f^{-1}(1) \end{matrix}$ est bijective.
3. En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
On rappelle que la différence symétrique de $A, B \in \mathcal{P}(E)$ est définie par $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 10.

1. Montrer que $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$ est un anneau à division non-commutatif.
 $\mathbb{H}$ est l'anneau des quaternions.
2. Montrer que $X^2 + 1 \in \mathbb{H}[X]$ a une infinité de racines.

Exercice 11. Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Soit A un anneau.

1. Soit $I \subset A$ un idéal. Montrer que $I = A$ si et seulement si I contient un inversible de A .
2. Si A est commutatif, montrer que $\forall a \in A, (a) = A \Leftrightarrow a \in A^*$.
3. Si A est intègre, montrer que $\forall a, b \in A, (a) = (b) \Leftrightarrow \exists u \in A^*, b = au$.
4. Montrer que si A est un anneau à division alors les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A .

Exercice 13. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux surjectif.

1. Montrer que si I est un idéal de A alors $f(I)$ est un idéal de B .
2. Le résultat est-il toujours vrai si f n'est pas supposé surjectif?

Exercice 14. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A .

On définit le radical de I par $\sqrt{I} := \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A .
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Déterminer $\sqrt{I}$ pour $A = \mathbb{Z}$ et $I = n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que 0 est le seul nilpotent de $A/\sqrt{I}$.

Exercice 15. Pour chacun des anneaux suivants, exhiber un anneau isomorphe "plus simple" :

1. $A[X]/(X - a)$ où A est un anneau commutatif et $a \in A$.
2. $\mathbb{Z}[X]/(2X - 1)$