Université d'Angers – 2023/2024

Théorie des anneaux

CC du 20/06/2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
*Sauf mention contraire, vous devez **justifier toutes vos réponses**.*
La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

(1) Soit A un anneau.
  a. Que signifie que A est principal ?
  b. Que signifie que A est euclidien ?

(2) Soient A et B deux anneaux.
  a. Que signifie que l'application $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux ?

  Pour les deux questions suivantes, on suppose que $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux.
  b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal de A.
  c. Montrer que f est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 2.

(1) Soit A un anneau. On définit le *centre* de A par $C := \{x \in A \ : \ \forall a \in A,\ xa = ax\}$.
  Montrer que C est un sous-anneau de A.

(2) On considère le sous-anneau $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \ : \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$ des quaternions.

  On note $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
  a. Montrer que $(\mathbf{1}, I, J, K)$ est une base de $\mathbb{H}$ vu comme espace vectoriel réel.

  On admet que $IJ = K$, $JI = -K$, $JK = I$, $KJ = -I$, $KI = J$, $IK = -J$, et que $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$.
  b. Déterminer le centre de $\mathbb{H}$.

Exercice 3.

(I) Première partie.

L'objectif de cette partie est de montrer que si A est un anneau euclidien alors il existe $x \in A \setminus A^*$ tel que la restriction $\pi_{|A^* \cup \{0\}} : A^* \cup \{0\} \to A/(x)$ de la projection canonique (qui à $y \in A^* \cup \{0\}$ associe $\overline{y}$ la classe de y modulo l'idéal (x)) est surjective.

  (1) Montrer que si A est un corps alors un tel x existe.
  (2) On suppose maintenant que A est un anneau euclidien qui n'est pas un corps et dont le stathme est noté v.
    (a) Justifier qu'il existe $x \in A$ non-nul et non-inversible tel que $v(x)$ soit minimal.
    (b) Montrer qu'un tel x convient.
  (3) Déterminer un tel x pour les anneaux euclidiens suivants :
    (a) $(\mathbb{R}, v := 1)$ (b) $(\mathbb{Z}, v := |\cdot|)$ (c) $(\mathbb{R}[X], v := \deg)$ (d) $\left(\mathbb{Z}[i], v := |\cdot|^2\right)$

(II) Deuxième partie.

On pose $\alpha := \dfrac{1 + i\sqrt{19}}{2}$ et on considère $A := \{a + b\alpha \in \mathbb{C} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

  (1) Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$ et en déduire que α est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers de degré 2 que l'on exhibera.
  (2) Montrer que A est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant α.
  (3) Pour $z \in A$, on pose $N(z) := z\overline{z}$.
    (a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ N(a + b\alpha) = a^2 + ab + 5b^2$.
    (b) Montrer que $\forall z \in A,\ z \in A^* \Leftrightarrow N(z) = 1$.
    (c) En déduire que A^* possède deux éléments.
  (4) Conclure des questions des deux parties précédentes que A n'est pas euclidien.
    Indice : on rappelle que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'unique anneau à deux éléments et que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est l'unique anneau à trois éléments, à isomorphisme près.

Tournez la page S.V.P.

(III) Troisième partie.

(1) Soient $a, b \in A \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que
- $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$.
- $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$.

Indice : on pourra écrire $\frac{a}{b} = u + v\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $u, v \in \mathbb{Q}$ *et considérer deux cas :* $v \notin \left]n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}\right[$ *et* $v \in \left]n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}\right[$ *où* $n = \lfloor v \rfloor$ *est la partie entière de* v.

(2) (a) Montrer que $A \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
(b) En déduire que $A/(2)$ est un corps, i.e. que (2) est un idéal maximal de A.

(3) Montrer que A est un anneau principal.
Indice : on pourra adapter la démonstration de la proposition stipulant qu'un anneau euclidien est principal en remplaçant la division euclidienne par le résultat de la question (1) et avec une disjonction de cas.

(IV) Vrai ou Faux ? (sans justifier)

(1) Un anneau euclidien est principal.
(2) Un anneau principal est euclidien.
(3) Un anneau principal est factoriel.
(4) Un anneau euclidien est factoriel.