Université d'Angers – 2023/2024

Analyse approfondie

Période 7

Exercice 1.
On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $x = \frac{1}{n}$ et par $f(x) = 1$ sinon.

1. Déterminer $\overline{\int_0^1} f(x)dx$.
2. (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[0,1]$ telle que $L_P(f) > 1 - \varepsilon$.
   On pourra considérer une subdivision dont le premier segment contient $\left\{ \frac{1}{k} \ : \ k \geq n \right\}$, pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   (b) En déduire la valeur de $\underline{\int_0^1} f(x)dx$.
3. La fonction f est-elle intégrable ? Le cas échéant, quelle est la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$?

Exercice 2 (Fonction de Dirichlet)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Montrer que $f_{|[0,1]}$ n'est pas intégrable.

Exercice 3 (Fonction de Thomae)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N}_{>0},\ \text{pgcd}(p,q) = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
Montrer que $f_{|[0,1]}$ est intégrable.

Exercice 4.
On considère $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^p$ où $p \in \mathbb{N}$ et où $0 < a < b$.

1. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ l'unique subdivision de $[a,b]$ en n intervalles dont les rapports des extrémités $\frac{x_k}{x_{k-1}}$ sont égaux. Calculer $U_P(f)$ et $L_P(f)$.
   Indice : on pourra commencer par exprimer x_k en fonction de a, b et k.
2. En déduire que $\displaystyle\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

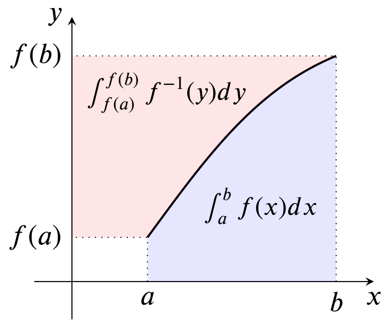
Exercice 5.

1. (a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
   Montrer que si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
   (b) Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables.
   Montrer que si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
2. Construire une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable et positive telle qu'il existe $x \in [a,b]$ vérifiant $f(x) > 0$ mais $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.
3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $L_P(f) > 0$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 6.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f est intégrable.

Exercice 7.

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = [f(a), f(b)]$.
   (b) Montrer que $\tilde{f} : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ définie par $\tilde{f}(x) \coloneqq f(x)$ est bijective.
   On notera abusivement f^{-1} pour la réciproque de $\tilde{f}$.
   (c) Justifier que f et f^{-1} sont intégrables.
   (d) Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
      i. Montrer que $Q \coloneqq \{f(a) = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = f(b)\}$ est une subdivision de $[f(a), f(b)]$.
      ii. Montrer que $L_{f^{-1}}(Q) + U_f(P) = bf(b) - af(a)$.
   (e) En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a)$.
   La figure ci-contre illustre la formule obtenue : l'aire de la partie colorée est la différence des aires des deux rectangles.



2. *Application.* Calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^b \sqrt[p]{x}dx$ où $0 \leq a \leq b$ et où $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 8.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\cos(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx.$$

Exercice 9.
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds = \ell$.

Exercice 10.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
On définit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $\displaystyle F(x) \coloneqq \int_a^x f(s)ds$.
1. Montrer que F est continue.
2. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^x f(s)ds = \int_x^b f(s)ds$.
3. Dans la question précédente, peut-on toujours prendre $x \in]a,b[$?

Exercice 11.
Les fonctions suivantes sont-elles intégrables ? Le cas échéant, déterminer la valeur de l'intégrale.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 42 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. $g : [0,10] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
3. $h : [0,5\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$.
4. $i : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $i(x) = x + \lfloor x \rfloor$.
5. $j : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $j(x) = \begin{cases} x + \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 12 (Version intégrale du théorème des accroissements finis)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable, où $a < b$.

1. Montrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.
2. Le résultat est-il toujours valide si g change de signe ?

Exercice 13.
Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et déterminer leurs dérivées.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \sin^2(t)dt$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2+\sin^2(t)}dt$.
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^{42} \frac{x}{1+t^2+\sin^2(t)}dt$.

Exercice 14.
Montrer que les fonctions suivantes sont constantes.

1. $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$
2. $g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 15.
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 2x - 1$.

Exercice 16.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$.

Exercice 17.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 18.

1. *Intégrales de Wallis.*

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$

   (b) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

   (f) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_nW_{n+1} en fonction de n et en déduire que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

   (g) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ et que $\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

2. *Application : formule de Stirling.*

   Pour $n \geq 1$, on définit $u_n := \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

   (a) Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge.

   (c) En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geq1}$ converge.

   (d) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^ne^{-n}$ (*théorème de de Moivre*) .

   (e) Utiliser les résultats sur les intégrales de Wallis pour déterminer C.
   L'équivalent de $n!$ *obtenu s'appelle la* formule de Stirling.

Exercice 19 (Irrationalité de π)**.**

1. Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(1-x)^n$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \sum_{k\geq0} (-1)^k r^{2n-2k} f^{(2k+1)}(x).$$

   (*on peut remarquer que la somme ci-dessus est finie puisque f est un polynôme*).

   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

   (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

   (c) Montrer que $F''(x) = -r^2F(x) + r^{2n+2}f(x)$.

   (d) Calculer $\frac{d}{dx}\big(F'(x)\sin(rx) - rF(x)\cos(rx)\big)$.

   (e) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(rx)dx$.

2. Montrer que

$$\forall r \in]0,\pi],\ r \in \mathbb{Q} \implies (\sin(r) \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \cos(r) \notin \mathbb{Q}).$$

3. En déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.