Université d'Angers – 2023/2024

Analyse approfondie

Période 6

1 L'ensemble des nombres réels

Exercice 1. Déterminer l'image des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [-2,3]\times[2,4] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1]\times[-2,3] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [2,3]\times[-2,-1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-6,-3]\times[2,4] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$

Exercice 2. Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
2. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

Exercice 3.

1. Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R},\ ab\leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
2. (a) Montrer que $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$.
   (b) Montrer que $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ 3ab+3bc+3ac\leq (a+b+c)^2$.
3. (a) Montrer que $\forall a,b\geq 0,\ \sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{2}$ (*inégalité arithmético-géométrique*).
   (b) Montrer que $\forall a,b,c\geq 0,\ (a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.

Exercice 4. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$.

Exercice 5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1$.

Exercice 6. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2x\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq 0$.
2. En déduire l'*inégalité de Cauchy–Schwarz* : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$.
3. Étudier le cas d'égalité.
4. Applications.
   (a) Montrer que $\forall x_1,\dots,x_n\geq 0,\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\leq\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$.
   (b) On considère deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$. On note $\alpha_i=\overline{A_iB_i}$, $\beta_i=\overline{B_iC_i}$ et $\gamma_i=\overline{A_iC_i}$. Montrer que $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont semblables si et seulement si

$$\sqrt{\alpha_1\alpha_2}+\sqrt{\beta_1\beta_2}+\sqrt{\gamma_1\gamma_2}=\sqrt{\left(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\right)\left(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\right)}$$

Exercice 7.

1. Résoudre $|x^2-1|<x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
2. Résoudre $|x^2-4x+3|=2x+3$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
3. Résoudre $|2x|\geq x^2-1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ |x-1|\leq x^2-x+1$.

Exercice 9.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$x = \max(x,0) + \min(x,0) \qquad \text{et} \qquad |x| = \max(x,0) - \min(x,0).$$

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

Exercice 11. Étant donné une partie $E \subset \mathbb{R}$, on rappelle que l'on dénote par $\max(E)$ le plus grand élément de E (s'il existe) et par $\sup(E)$ la borne supérieure de E (si elle existe).
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant :

1. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors E admet une borne supérieure.
2. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors E admet un plus grand élément.
3. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors $\max(E) = \sup(E)$.
4. Si $E \subset \mathbb{R}$ est majorée alors E admet une borne supérieure.
5. Si $E \subset \mathbb{R}$ est majorée et non-vide alors E admet un plus grand élément.
6. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors E est majorée.
7. Si $E \subset \mathbb{R}$ admet un plus grand élément alors E est non-vide.

Exercice 12. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer, lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément :

(1) $[-\pi, 42[$

(2) $\left\{x \in \mathbb{R} \ :\ x^2 < 2\right\}$

(3) $[0,1[\cap\mathbb{Q}$

(4) $\mathbb{N}$

(5) $\left\{\frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$

(6) $\left\{\frac{n}{mn+1} \ :\ n,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$

(7) $\left\{\frac{n}{mn+1} \ :\ n,m \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 13. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).
Lorsque l'assertion est vraie, on précisera la relation entre les bornes inférieures/supérieures considérées.

1. Si A admet une borne supérieure alors B admet une borne supérieure.
2. Si A admet une borne inférieure alors B admet une borne inférieure.
3. Si A admet une borne supérieure alors B admet une borne inférieure.
4. Si B admet une borne supérieure alors A admet une borne supérieure.
5. Si B admet une borne inférieure alors A admet une borne inférieure.

Exercice 14. Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. On pose $A + B \coloneqq \{a+b \ :\ a \in A \text{ et } b \in B\}$ (*somme de Minkowski*).
   (a) Montrer que $A+B$ est non-vide et majorée.
   (b) Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. (a) Montrer que $A \cup B$ est non-vide et majorée.
   (b) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 15. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b.$$

1. Montrer que A admet une borne supérieure et que B admet une borne inférieure.
2. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 16. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ de sorte que $\inf(A)$ et $\sup(B)$ existent.

1. Montrer que si $\inf(A) = \sup(B)$ alors $A \cap B$ contient au plus un élément.
2. Sous l'hypothèse que $\inf(A) = \sup(B)$, l'intersection $A \cap B$ peut-elle être vide ?

Exercice 17.

1. Montrer que la fonction partie entière est croissante.
2. (a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
   (b) En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 18. Donner une expression fermée du nombre de chiffres d'un entier strictement positif à l'aide du logarithme décimal et de la partie entière.
Rappel : le logarithme décimal est la fonction $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exercice 19.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor}{n^2}$.
2. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
3. Donner une démonstration alternative utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soient I et J deux intervalles.

1. Montrer que $I \cap J$ est un intervalle.
2. Montrer que la somme de Minkowski $I + J$ est un intervalle.
3. (a) Montrer que si $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cup J$ est un intervalle.
   (b) Montrer que l'hypothèse de la question précédente n'est pas superflue.

Exercice 21. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
Montrer que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \varnothing \implies I \cap J = \varnothing$.

Exercice 22. On définit l'ensemble des nombres dyadiques par $D := \left\{ \frac{m}{2^n} \ :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \exists d \in D,\ x < d < y$.

Exercice 23.

1. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle ?
2. Le produit de deux nombres irrationnels est-il nécessairement irrationnel ?
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},\ x + y \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ xy \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 24. On rappelle que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.
2. Montrer que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

Exercice 25. Montrer que les nombres suivants sont irrationnels :

(a) $\sqrt{p}$ où p est un nombre premier
(b) $\sqrt{6}$
(c) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{11}}$
(d) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$
(e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
(f) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$
(g) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2$
(h) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.
(i) $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

Continuité uniforme

Exercice 26. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Montrer que si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue.

Exercice 27. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Montrer que si f' est bornée alors f est uniformément continue.

Exercice 28. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe (et est finie).
2. Montrer que si la limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie alors f n'est pas uniformément continue.

Exercice 29. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

1. (a) Montrer que si f est uniformément continue alors $\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leq ax + b$.
   (b) Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ alors f n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que si f est continue et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est uniformément continue.
3. Supposons que f soit continue et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   Montrer que l'on ne peut rien conclure sur la continuité uniforme de f.

Exercice 30. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, monotone et bornée où $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 31.

1. Montrer que $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
2. Montrer que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
3. Montrer que $\frac{1}{x} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
4. Montrer que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
5. Montrer que $\exp : \left[-\pi, \sqrt{42}\right] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
6. Montrer que $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
7. Montrer que $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
8. Montrer que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
9. Montrer que $\sin(1/x) :]0, 1[\to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
10. La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle uniformément continue ?

Exercice 32. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et uniformément continues sur un intervalle.

1. Montrer que fg est uniformément continue.
2. La conclusion reste-t-elle valide si f et g ne sont pas bornées ?

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique continue.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 34. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que si $\lim\limits_{\mathbb{N} \ni n \to +\infty} f(n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. L'énoncé précédent reste-t-il vrai si l'on suppose la fonction seulement continue ?

Exercice 35.

1. Montrer que la propriété de Borel–Lebesgue n'est plus vraie si on remplace $[a, b]$ par un intervalle ouvert.
2. Montrer que la propriété de Borel–Lebesgue n'est plus vraie si les intervalles de la famille $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ne sont pas ouverts.