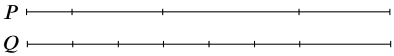
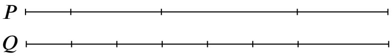
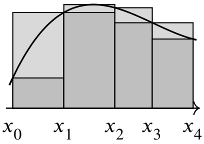
- *Subdivision* de $[a, b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.
  On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.



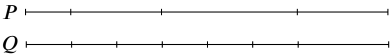
- *Subdivision* de $[a, b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.
  On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.



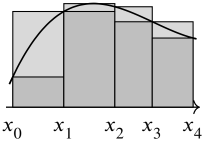
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et
  $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision alors :
  - *Somme de Darboux supérieure* de f selon P :
    $$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)$$
  - *Somme de Darboux inférieure* de f selon P :
    $$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)$$



- *Subdivision* de $[a,b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.
  On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.

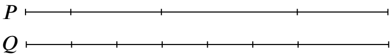


- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et
  $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision alors :
  - *Somme de Darboux supérieure* de f selon P :
  $$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$
  - *Somme de Darboux inférieure* de f selon P :
  $$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$

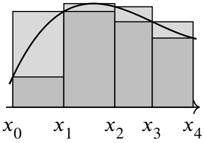


- Si Q est plus fine que P alors
  $$U_Q(f) \le U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \ge L_P(f).$$
- Si P et Q sont deux subdivisions de $[a,b]$ alors
  $$L_P(f) \le U_Q(f).$$

- *Subdivision* de $[a,b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.
  On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.

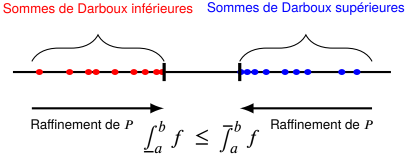


- Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et
  $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision alors :
  - *Somme de Darboux supérieure* de f selon P :
  $$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$
  - *Somme de Darboux inférieure* de f selon P :
  $$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$

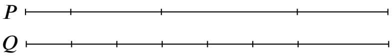


- Si Q est plus fine que P alors
  $$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$
- Si P et Q sont deux subdivisions de $[a,b]$ alors
  $$L_P(f) \leq U_Q(f).$$

- Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée,
  - **Intégrale inférieure** de f :
  $$\underline{\int_a^b} f := \sup \left\{ L_P(f)\ :\ P \text{ subdivision de [a,b]} \right\}$$
  - **Intégrale supérieure** de f :
  $$\overline{\int_a^b} f := \inf \left\{ U_P(f)\ :\ P \text{ subdivision de [a,b]} \right\}$$



- *Subdivision* de $[a,b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.
  On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.

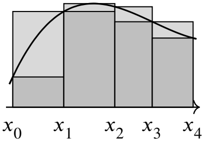


- Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et
  $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision alors :
  - *Somme de Darboux supérieure* de f selon P :

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$

  - *Somme de Darboux inférieure* de f selon P :

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$



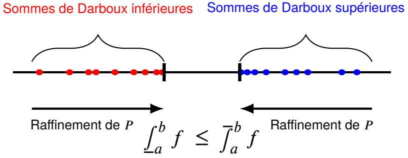
- Si Q est plus fine que P alors
  $U_Q(f) \leq U_P(f)$ et $L_Q(f) \geq L_P(f)$.
- Si P et Q sont deux subdivisions de $[a,b]$ alors
  $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

- Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée,
  - **Intégrale inférieure** de f :

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \left\{ L_P(f)\ :\ P \text{ subdivision de [a,b]} \right\}$$

  - **Intégrale supérieure** de f :

$$\overline{\int_a^b} f := \inf \left\{ U_P(f)\ :\ P \text{ subdivision de [a,b]} \right\}$$



- $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si elle est bornée et si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

On note alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$