Intégrale de Riemann à la Darboux

université angers

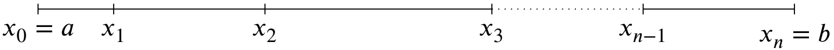
Période 7

Subdivisions

Définition

Une *subdivision* P d'un segment $[a, b]$ est la donnée d'une suite finie de $[a, b]$ qui est strictement croissante, dont le premier élément est a et dont le dernier élément est b.
On note une subdivision de la façon suivante : $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

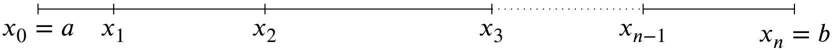
Intuitivement, on a scindé $[a, b]$ en un nombre fini de segments :



Définition

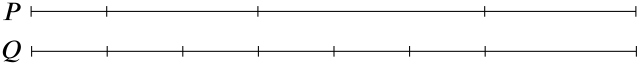
Une *subdivision* P d'un segment $[a, b]$ est la donnée d'une suite finie de $[a, b]$ qui est strictement croissante, dont le premier élément est a et dont le dernier élément est b.
On note une subdivision de la façon suivante : $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Intuitivement, on a scindé $[a, b]$ en un nombre fini de segments :



Définition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que Q est *plus fine* que P si $P \subset Q$.



Sommes de Darboux – 1

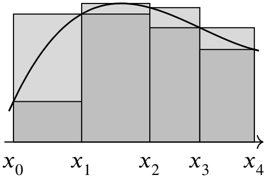
Définition

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
On définit la *somme de Darboux supérieure* de f selon P par

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)$$

et la *somme de Darboux inférieure* de f selon P par

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right).$$



Sommes de Darboux – 1

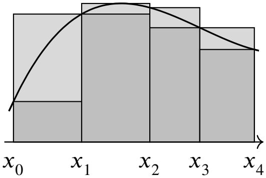
Définition

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.
On définit la *somme de Darboux supérieure* de f selon P par

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \right)$$

et la *somme de Darboux inférieure* de f selon P par

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right).$$



Pourquoi suppose-t-on que f est bornée ?

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Démonstration. Il suffit d'étudier le cas d'une subdivision d'un intervalle en deux intervalles. Soit $c \in]x_{k-1}, x_k[$, alors

$$\begin{aligned}
(x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f &= (x_k - c + c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\
&= (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f + (x_k - c) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\
&\geq (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},c]} f + (x_k - c) \sup_{[c,x_k]} f.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a,b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

Démonstration. En effet, si on pose $R \coloneqq P \cup Q$ alors R est plus fine que P et que Q, donc

$$L_P(f) \leq L_R(f) \leq U_R(f) \leq U_Q(f).$$

∎

Sommes de Darboux – 2

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$. Si Q est plus fine que P alors

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \quad \text{et} \quad L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Proposition

Soient P et Q deux subdivisions de $[a, b]$, alors $L_P(f) \leq U_Q(f)$.

Intégrales inférieure et supérieure

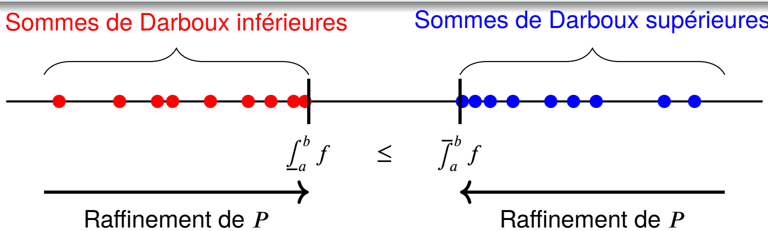
Définitions

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'**intégrale inférieure** de f par

$$\underline{\int_a^b} f \coloneqq \sup\left\{L_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}$$

et l'**intégrale supérieure** de f par

$$\overline{\int_a^b} f \coloneqq \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\}.$$



Intégrales inférieure et supérieure

Définitions

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'**intégrale inférieure** de f par

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \left\{ L_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]} \right\}$$

et l'**intégrale supérieure** de f par

$$\overline{\int_a^b} f := \inf \left\{ U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]} \right\}.$$

Pourquoi ces quantités sont-elles bien définies ?

Intégrale de Riemann

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

On dit que f est *intégrable* si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Le cas échéant, on dénote cette quantité par

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

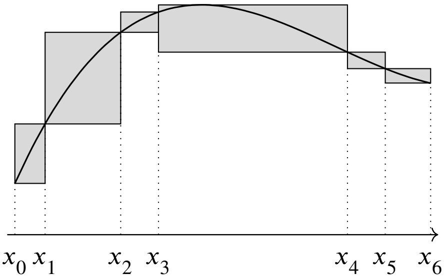
Un premier critère d'intégrabilité

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Graphiquement, ce critère énonce que f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de $[a,b]$ telle que l'aire grisée ci-dessous soit plus petite que ε.



Ce critère ne donne pas la valeur de l'intégrale.

Un premier critère d'intégrabilité

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Démonstration.

$\Rightarrow$: Supposons que f soit intégrable, i.e. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une subdivision P_1 de $[a,b]$ telle que $U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$

et une subdivision P_2 de $[a,b]$ telle que $L_{P_2}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $P := P_1 \cup P_2$. Alors $U_P(f) \leq U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ et $L_P(f) \geq L_{P_2}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $U_P(f) - L_P(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Un premier critère d'intégrabilité

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Démonstration.
$\Leftarrow$: Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Ainsi

$$L_P(f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U_P(f)$$

d'où

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \varepsilon$,

d'où $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, i.e. f est intégrable. ■

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$ (le résultat est évident si $c = a$ ou $c = b$).

$\Rightarrow$ Supposons que f soit intégrable sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Notons $\tilde{P} \coloneqq P \cup \{c\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Alors il existe $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $x_k = c$.
Considérons $P' \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c\}$ et $P'' \coloneqq \{c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$.
Alors

$$U_{P'}(f_{[a,c]}) - L_{P'}(f_{[a,c]}) \leq U_{P'}(f_{[a,c]}) - L_{P'}(f_{[a,c]}) + U_{P''}(f_{[c,b]}) - L_{P''}(f_{[c,b]}) = U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

et

$$U_{P''}(f_{[c,b]}) - L_{P''}(f_{[c,b]}) \leq U_{P'}(f_{[a,c]}) - L_{P'}(f_{[a,c]}) + U_{P''}(f_{[c,b]}) - L_{P''}(f_{[c,b]}) = U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$$

Donc $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables.

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$ (le résultat est évident si $c = a$ ou $c = b$).

$\Leftarrow$ Supposons que $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ soient intégrables.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe une subdivision $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c\}$ de $[a,c]$ et une subdivision $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ de $[c,b]$ telles que

$$U_{P_1}(f_{[a,c]}) - L_{P_1}(f_{[a,c]}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad U_{P_2}(f_{[c,b]}) - L_{P_2}(f_{[c,b]}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons la partition $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b\}$ de $[a,b]$, alors

$$U_P(f) - L_P(f) = \left(U_{P_1}(f_{[a,c]}) + U_{P_2}(f_{[c,b]})\right) - \left(L_{P_1}(f_{[a,c]}) + L_{P_2}(f_{[c,b]})\right) = U_{P_1}(f_{[a,c]}) - L_{P_1}(f_{[a,c]}) + U_{P_2}(f_{[c,b]}) - L_{P_2}(f_{[c,b]}) \leq \varepsilon.$$

Donc f est intégrable.

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $c \in]a,b[$ (le résultat est évident si $c = a$ ou $c = b$).
Montrons l'égalité.
Soit P une partition de $[a,b]$ et $\tilde{P} := P \cup \{c\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Il existe $k \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que $x_k = c$.

Notons $P' := \{a = x_0 < \cdots < x_k = c\}$ et $P'' := \{c = x_k < \cdots < x_n = b\}$. Alors $U_P(f) = U_{P'}(f_{[a,c]}) + U_{P''}(f_{[c,b]}) \geq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Donc $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ est un minorant des sommes de Darboux supérieures de f. Montrons que c'est le plus grand.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des subdivisions P_1 de $[a,c]$ et P_2 de $[c,b]$ telles que $U_{P_1}(f_{[a,c]}) < \int_a^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ et $U_{P_2}(f_{[c,b]}) < \int_c^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$.

Considérons la subdivision de $[a,b]$ définie par $P := P_1 \cup P_2$ alors $U_P(f) = U_{P_1}(f_{[a,c]}) + U_{P_2}(f_{[c,b]}) < \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \varepsilon$.

Donc $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\} = \int_a^b f(x)dx$. ∎

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Corollaire

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Relation de Chasles

Théorème : relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont intégrables ; dans ce cas, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Corollaire

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Convention de Chasles

Par définition, $\displaystyle\int_a^a f = 0$, ainsi, du fait de la relation de Chasles, il est naturel d'introduire la notation suivante.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors on pose

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f + g) : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $(fg) : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $(fg) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz :
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$
4. si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 1

Théorème

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $(f+g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $(cf) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. $(fg) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz :
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$
4. si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 2

Il se peut que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit stricte.
Considérons $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = 0$ mais $\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx = \frac{1}{4}$.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 2

Il se peut que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit stricte.
Considérons $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = 0$ mais $\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx = \frac{1}{4}$.

La réciproque du point 5 est fausse.
Considérons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $|f|$ est intégrable mais f ne l'est pas.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \;:\; f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Démonstration. Soit $c \in [a,b]$. On définit $\chi_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $\chi_c(c) = 1$ et $\chi_c(x) = 0$ si $x \neq c$.

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ alors $L_P(f) = \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\right) = 0$.

Ainsi $\underline{\int_a^b} \chi_c = 0$.
Donc, 0 est un minorant des sommes de Darboux supérieures. Montrons que c'est le plus grand.
Soit $\varepsilon > 0$, alors, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 1$.

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ la subdivision de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Alors $U_P(f) = \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f\right) \leq 2\frac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Donc $\overline{\int_a^b} \chi_c \coloneqq \inf\left\{U_P(f) \ : \ P \text{ subdivision de [a,b]}\right\} = 0$.
Ainsi $\int_a^b \chi_c(x)dx = 0$.

On obtient le théorème en remarquant que $f = \displaystyle\sum_{c \in [a,b] \setminus f^{-1}(\{0\})} f(c)\chi_c$. ■

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Corollaire

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Corollaire

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Démonstration. D'après le théorème précédent $g - f$ est intégrable.
Donc $g = f + (g - f)$ est aussi intégrable et

$$\int_a^b g = \int_a^b (f + (g - f)) = \int_a^b f + \int_a^b (g - f) = \int_a^b f + 0.$$

∎

Propriétés de l'intégrale de Riemann – 3

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0\}$ soit fini.

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Corollaire

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est intégrable et $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ soit fini alors g est intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Démonstration. Remarquons d'abord que f est bornée d'après le Théorème de Weierstrass (fonction continue sur un segment).
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Posons $n := \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor + 1$ et considérons la subdivision $P := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Alors $x_{k+1} - x_k \leq \eta$ et ainsi

$$U_P(f) - L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P de $[a, b]$ telle que $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$.
Donc f est intégrable. ∎

Continuité

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Corollaire

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et admet un nombre fini de discontinuités alors f est intégrable.

Théorème de la moyenne : une version intégrale du théorème des accroissements finis

Théorème de la moyenne

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Théorème de la moyenne : une version intégrale du théorème des accroissements finis

Théorème de la moyenne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que f est intégrable car continue.
Puisque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur un segment, d'après le théorème de Weierstrass, il existe $s, S \in [a,b]$ tels que $\forall x \in [a,b],\ f(s) \leq f(x) \leq f(S)$.

D'où $f(s)(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq f(S)(b-a)$ et $f(s) \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(S)$.

Puisque f est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

∎

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors F est dérivable et $F' = f$.

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors F est dérivable et $F' = f$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Soit $x \in I$ tel que $x \neq x_0$, alors

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe $\xi \in [x, x_0]$ si $x_0 > x$ ou $\xi \in [x_0, x]$ sinon, tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi).$$

Donc, par continuité de f, on a $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$.

Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. ∎

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.

Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors F est dérivable et $F' = f$.

Définition : primitive

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.
On dit que $F : D \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si F est dérivable et si $F' = f$.

Corollaire

Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Le théorème fondamental de l'analyse – 1

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.
Définissons $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
Alors F est dérivable et $F' = f$.

Une fonction peut admettre une primitive sans être intégrable.
Par exemple, définissons $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si x≠0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors F est dérivable mais $f = F'$ n'est pas intégrable (car non bornée).

Le théorème fondamental de l'analyse – 2

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Le théorème fondamental de l'analyse – 2

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Démonstration. Définissons $G : I \to \mathbb{R}$ par $G(x) := F(x) - \int_a^x f(t)dt$.

Alors G est dérivable sur I et $G' = f - f = 0$.
Donc G est constante sur I, i.e. il existe $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ G(x) = C$.

Ainsi $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. ■

Le théorème fondamental de l'analyse – 2

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a \in I$.
Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Corollaire

Deux primitives d'une fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

L'hypothèse que le domaine est un intervalle est importante. Définissons $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par

$$F_1(x) = \ln(|x|) \qquad \text{et} \qquad F_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|) + 42 & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) - \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors F_1 et F_2 sont deux primitives de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ mais $F_1 - F_2$ n'est pas constante.

Le théorème fondamental de l'analyse – 3

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Le théorème fondamental de l'analyse – 3

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. On déduit du corollaire précédent, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Ainsi $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt.$ ∎

Le théorème fondamental de l'analyse – 3

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

En pratique on note $[F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$ (ou plus simplement $[F(x)]_a^b$ s'il n'y a pas de confusion possible).
Ainsi la conclusion du théorème fondamental de l'analyse se réécrit

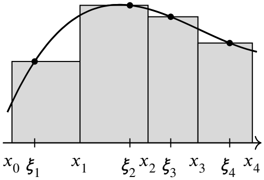
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Sommes de Riemann – 1

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $P := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ et, pour chaque $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, un élément $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
La *somme de Riemann* de f associée à P et $\xi := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est

$$S_{P,\xi}(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$

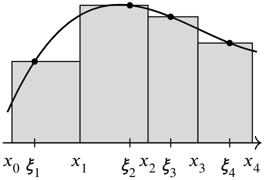


Sommes de Riemann – 1

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $P := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ et, pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, un élément $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
La *somme de Riemann* de f associée à P et $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ est

$$S_{P,\xi}(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$



- $L_P(f) \leq S_{P,\xi}(f) \leq U_P(f)$
- Il est naturel de fixer $\xi_k = x_{k-1}$, $\xi_k = x_k$ ou $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \dots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \dots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\left(S_{P_n,\xi_n}(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann associées à f vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} S_{P_n,\xi_n}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\left(S_{P_n,\xi_n}(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann associées à f vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{P_n,\xi_n}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Le théorème est vrai pour toute fonction intégrable (voir polycopié) mais la démonstration est plus simple lorsque la fonction est supposée continue.

Sommes de Riemann – 2

Définition : pas d'une subdivision

Soit $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Le *pas* de P est $\|P\| \coloneqq \max\left\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots, x_n - x_{n-1}\right\}$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\left(S_{P_n,\xi_n}(f)\right)_n$ une suite de sommes de Riemann associées à f vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{P_n,\xi_n}(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, f est uniformément continue.
Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$, il existe $N > 0$ tel que $\forall n \geq N$, $\|P_n\| \leq \eta$.
Soit $n \geq N$. Notons $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b\}$ et $\xi_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_{P_n,\xi_n}(f)\right| = \left|\sum_{k=1}^r \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - (x_k - x_{k-1})f(\xi_k)\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^r \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(\xi_k)\right) dx\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^r \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left|f(x) - f(\xi_k)\right| dx \leq \sum_{k=1}^r \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

On a ainsi montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies \left|\int_a^b f(x)dx - S_{P_n,\xi_n}(f)\right| \leq \varepsilon$. $\blacksquare$

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Sommes de Riemann – 3

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$

Démonstration. On considère la subdivision $P_n := \{x_k := a + k\frac{b-a}{n} \ : \ k = 0, \dots, n\}$.

Alors $\|P_n\| = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour le premier point, il s'agit de la somme de Riemann obtenue avec $\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Pour le second, de la somme de Riemann obtenue avec $\xi_k = x_{k-1}$. ■

Sommes de Riemann – 3

Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple

Comme $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

Intégration par parties – 1

Théorème : formule d'intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Intégration par parties – 1

Théorème : formule d'intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. Les fonctions u et v sont continues et donc intégrables.
De même les fonctions u' et v' sont intégrables par hypothèse.
Donc les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ sont intégrables et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

∎

Intégration par parties – 1

Théorème : formule d'intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que u' et v' soient intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. Les fonctions u et v sont continues et donc intégrables.
De même les fonctions u' et v' sont intégrables par hypothèse.
Donc les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ sont intégrables et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b .$$

∎

En pratique, les fonctions u et v sont généralement dérivables de dérivées continues (et donc u' et v' sont intégrables car continues).

Intégration par parties – 2

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx$.

On considère $u, v : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définies par $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = x$.
Alors u et v sont dérivables de dérivées $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = 1$.
D'où, par IPP,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\sin(x)dx &= \int_0^\pi u'(x)v(x)dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u(x)v'(x)dx \\
&= \pi + \int_0^\pi \cos(x)dx \\
&= \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi.
\end{aligned}$$

Intégration par parties – 3

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x dx$.

On considère $u_1, v_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $u_1(x) = e^x$ et $v_1(x) = \cos(x)$.
Alors u_1 et v_1 sont dérivables de dérivées $u_1'(x) = e^x$ et $v_1'(x) = -\sin(x)$, d'où par IPP :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1'(x)v_1(x)dx = \left[u_1(x)v_1(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x)v_1'(x)dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)dx.$$

On considère désormais $u_2, v_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $u_2(x) = e^x$ et $v_2(x) = \sin(x)$.
Alors u_2 et v_2 sont dérivables de dérivées $u_2'(x) = e^x$ et $v_2'(x) = \cos(x)$, d'où par IPP :

$$I = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2'(x)v_2(x) = -1 + \left[u_2(x)v_2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2(x)v_2'(x)dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$$

Donc $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Formule de changement de variable – 1

Théorème : formule d'intégration par changement de variable

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a,b])$.
Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Formule de changement de variable – 1

Théorème : formule d'intégration par changement de variable

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a,b])$.
Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Démonstration.
Remarquons que $I := \varphi([a,b])$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires (et même un segment d'après le théorème de Weierstrass).
Ainsi f admet une primitive F sur I.
Puisque f est continue, et donc intégrable, sur $[\min(\varphi(a),\varphi(b)), \max(\varphi(a),\varphi(b))]$ et que $(F\circ\varphi)' = f\circ\varphi\cdot\varphi'$ est continue, et donc intégrable, sur $[a,b]$, on obtient

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)dx = F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(u)du$$

D'après la convention de Chasles, la dernière égalité est vraie même si $\varphi(b) \leq \varphi(a)$. ■

Formule de changement de variable – 1

Théorème : formule d'intégration par changement de variable

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et f une fonction continue sur $\varphi([a,b])$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Moyen mnémotechnique

En pratique, on voit φ comme une nouvelle variable dénotée u et on écrit sa dérivée avec la notation de Leibniz $\frac{du}{dx} := \varphi'(x)$, i.e.

$$u = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad du = \varphi'(x)dx$$

de sorte que la formule du théorème s'écrive alors :

$$\int_{\color{red}{\varphi(a)}}^{\color{blue}{\varphi(b)}} f({\color{purple}{u}}){\color{olive}{du}} = \int_{\color{red}{a}}^{\color{blue}{b}} f({\color{purple}{\varphi(x)}}){\color{olive}{\varphi'(x)dx}}.$$

Formule de changement de variable – 2

Exemple

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Formule de changement de variable – 2

Exemple

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Dans l'exemple précédent, nous reconnaissons une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3}{3}\right)'(x)dx = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Formule de changement de variable – 2

Exemple

On souhaite calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

On pose $u = \sin(x)$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Dans l'exemple précédent, nous reconnaissons une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3}{3}\right)'(x)dx = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

L'exemple suivant est plus intéressant puisque de la forme $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, difficile à calculer directement.

Exemple

On souhaite calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. On pose $x = \sin(\theta)$, alors

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)+2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$