Université d'Angers – 2023/2024

Analyse approfondie

CC du 13 mars 2024.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.
Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

(1) $\sqrt{10}$

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

Exercice 2.

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$.

(2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

Exercice 3.
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante.
Montrer que f admet un point fixe, i.e. $\exists c \in [0,1],\ f(c) = c$.
Indice : on pourra étudier l'ensemble $\{x \in [0,1] \ :\ f(x) \geq x\}$.

Exercice 4.
On rappelle qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}$, est lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

(1) Montrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne, où $E \subset \mathbb{R}$, alors f est uniformément continue.

(2) Montrer que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

(3) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a \leq b$.
On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$.

a. Justifier que F est bien définie.

b. Montrer que F est lipschitzienne.

Exercice 5.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée où $a < b$.
On suppose qu'il existe une subdivision $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que $U_P(f) = L_P(f)$.

(1) Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, f est constante sur $[x_{k-1}, x_k]$.

(2) En déduire que f est constante sur $[a,b]$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 6.
On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

(1) Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.
Montrer que si $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ alors $\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) = 0$.

(2) Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)dx = b - a.$$

Exercice 7.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln(t))^2} dt$.

Exercice 8.

(1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$.

(2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 9.
Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : (1) ι (2) H (3) δ (4) P

Solution de l'exercice 1.

(1) *Méthode 1 :* supposons par l'absurde que $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$.
Ainsi $2 \cdot 5 \cdot b^2 = a^2$ d'où une contradiction avec l'unicité de la factorisation en nombres premiers puisque 2 apparaît un nombre impair de fois dans la décomposition du membre de gauche et un nombre pair de fois dans celle du membre de droite.
Donc $\sqrt{10} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Méthode 2 : supposons par l'absurde que $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ et $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$.
Ainsi $2 | 10b^2 = a^2$ et donc $2 | a$ d'après le lemme d'Euclide puisque 2 est un nombre premier.
Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.
Donc $a^2 = 10b^2$ implique que $2k^2 = 5b^2$. Ainsi $2 | 5b^2$.
Puisque $\operatorname{pgcd}(2, 5) = 1$, on déduit du lemme de Gauss que $2 | b^2$ et donc, d'après le lemme d'Euclide puisque 2 est un nombre premier, que $2 | b$.
Donc $2 | a$ et $2 | b$, ainsi $2 | \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. D'où une contradiction.
Ainsi $\sqrt{10} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(2) Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{10} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2 - 7}{2} \in \mathbb{Q}$.
D'où une contradiction avec la question précédente.
Donc $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 2.

(1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ alors $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor -x \rfloor = -x$ (puisque $-x \in \mathbb{Z}$).
Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x - x = 0$.

On a bien montré que $\forall x \in \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Alors, par définition de la partie entière, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Puisque $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \mathbb{Z}$, on a

$$(*) \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor < x.$$

De même, on a

$$(**) \quad -x - 1 < \lfloor -x \rfloor < -x.$$

En sommant $(*)$ et $(**)$, il vient $-2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0$.
Puisque $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

On a bien montré que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

Solution de l'exercice 3.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante et $E := \{x \in [0,1] \ : \ f(x) \geq x\}$.
Alors $E \neq \varnothing$ puisque $0 \in E$ et E est majoré par 1. Donc $c := \sup(E)$ est bien défini.
Puisque $0 \in E$ et que 1 est un majorant de E, on a $c \in [0,1]$.

- Supposons par l'absurde que $f(c) < c$.
  Alors, puisque c est le plus petit des majorants, $f(c) \in [0,1]$ ne majore par E.
  Donc il existe $b \in E$ tel que $f(c) < b$. On a donc $f(c) < b \leq f(b)$ et $b \leq c$.
  D'où une contradiction avec la croissance de f.
- Supposons par l'absurde que $f(c) > c$.
  Alors, par croissance de f et car $f(c) \in [0,1]$, $f(f(c)) \geq f(c)$.
  Donc $f(c) \in E$ et $f(c) \leq c$ puisque c est un majorant de E.
  D'où une contradiction.

Ainsi $f(c) = c$.

Solution de l'exercice 4.

(1) Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe $k \geq 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in E$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.
Posons $\eta := \frac{\varepsilon}{k+1} > 0$.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $|x_1 - x_2| \leq \eta$ alors $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \leq k\eta \leq \varepsilon$.
On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in E$, $|x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$, i.e. que f est uniformément continue.

(2) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1 < x_2$ (si $x_1 = x_2$, il n'y rien à vérifier, et si $x_2 < x_1$, on peut les intervertir).
Puisque sin est dérivable sur $[x_1, x_2]$, on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $\sin(x_1) - \sin(x_2) = \sin'(c)(x_1 - x_2) = \cos(c)(x_1 - x_2)$.
Donc $|\sin(x_1) - \sin(x_2)| = |\cos(c)||x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|$.
On a bien montré que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, i.e. que sin est lipschitzienne pour $k = 1$.

(3) a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(t)\sin(xt)$ est continue sur un segment et est donc intégrable.
Ainsi $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$ est bien définie.

b. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
|F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^b f(t)\left(\sin(x_1 t) - \sin(x_2 t)\right) dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f(t)||\sin(x_1 t) - \sin(x_2 t)| dt \\
&\leq \int_a^b |f(t)||x_1 t - x_2 t| dt \qquad \text{d'après la question (2)} \\
&= \left(\int_a^b |t f(t)| dt \right) |x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

Donc F est lipscthitzienne.

Solution de l'exercice 5.

(1) Par hypothèse, on a $0 = U_P(f) - L_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_{k-1}\right)\left(\sup_{[x_{k-1},x_k]}(f) - \inf_{[x_{k-1},x_k]}(f)\right)$.
Ainsi, puisqu'il s'agit d'une somme nulle de termes positifs, on obtient que pour chaque $k = 1, \dots, n$,

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]}(f) - \inf_{[x_{k-1},x_k]}(f) = 0.$$

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ alors $\sup_{[x_{k-1},x_k]}(f) = \inf_{[x_{k-1},x_k]}(f)$ et donc f est constante sur $[x_{k-1}, x_k]$.

(2) Montrons par récurrence sur $k = 1, \dots, n$ que f est constante sur $[x_0, x_k]$.
Initialisation. D'après la question précédente, f est constante sur $[x_0, x_1]$.
Hérédité. Supposons que f soit constante sur $[x_0, x_k]$ pour $k = 1, \dots, n-1$.
Alors f est constante égale à $f(x_k)$ sur $[x_0, x_k]$ et sur $[x_k, x_{k+1}]$ et donc f est constante sur $[x_0, x_{k+1}]$.

Ainsi f est constante sur $[a, b] = [x_0, x_n]$.

Solution de l'exercice 6.

(1) *Méthode 1.* Supposons que $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$.
Définissons $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$, alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable et $\forall x \in [a, b],\ F'(x) = \varphi(x) \geq 0$.
Ainsi F est croissante, $F(a) = \int_a^a \varphi(t)dt = 0$ et $F(b) = \int_a^b \varphi(t)dt = 0$.
Donc F est constante et ainsi $\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) = F'(x) = 0$.

Méthode 2. Nous allons montrer la contraposée, i.e. $\exists x \in [a, b],\ \varphi(x) \neq 0 \implies \int_a^b \varphi(x)dx \neq 0$.
Supposons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\varphi(x_0) > 0$.
Puisque φ est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ |x - x_0| \leq \eta \implies \left|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right| \leq \frac{\varphi(x_0)}{2}$.

- Premier cas : $x_0 \in]a, b[$.
  Posons $\delta := \min\left(\eta, \frac{x_0-a}{2}, \frac{b-x_0}{2}\right)$ alors la subdivision $P := \{a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b\}$ est bien définie et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x)dx = \underline{\int_a^b} \varphi(x)dx &\geq \left(x_0 - \delta - a\right) \inf_{[a,x_0-\delta]}(\varphi) + 2\delta \inf_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}(\varphi) + (b - x_0 - \delta) \inf_{[x_0+\delta,n]}(\varphi) \\
&\geq 2\delta \inf_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}(\varphi) \quad \text{puisque } \varphi \geq 0 \\
&\geq \delta\varphi(x_0) \quad \text{puisque } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ \varphi(x) > \varphi(x_0) - \frac{\varphi(x_0)}{2} = \frac{\varphi(x_0)}{2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

- Deuxième cas : $x_0 \in \{a, b\}$.
  Alors, par continuité, il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $\varphi(x_1) > 0$ et on se ramène ainsi au premier cas.

(2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq 1$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = b-a$.
Définissons $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 1 - f(x)$.
Alors φ est continue, $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \geq 0$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b 1dx - \int_a^b f(x)dx = 0$.
Ainsi, d'après la question précédente, $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) = 0$ et donc $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 1$.

Réciproquement, vérifions que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ constante égale à 1 convient :

- f est continue.
- Soit $x \in [a,b]$ alors $f(x) = 1 \leq 1$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$.

Donc l'unique fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq 1$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = b-a$ est la fonction constante égale à 1.

Solution de l'exercice 7.
Soit $x > 1$.
Alors $x < x^3$ et, puisque $t \mapsto \frac{1}{(\ln(t))^2}$ est décroissante sur $[x, x^3]$, on a que $\forall t \in [x, x^3],\ \frac{1}{(\ln(t))^2} \geq \frac{1}{(\ln(x^3))^2}$.
Donc $\displaystyle\int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln(t))^2}dt \geq \int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln(x^3))^2}dt = \frac{x^3-x}{(\ln(x^3))^2} = \frac{x^3-x}{9(\ln(x))^2}$.
De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x}{9(\ln(x))^2} = +\infty$ par croissances comparées.
On obtient donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln(t))^2}dt = +\infty$.

Solution de l'exercice 8.

(1) Puisque la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(1+x)^2} \end{array}$ est continue sur un segment, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On aurait aussi pu considérer la fonction $\begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$.

(2) Puisque la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est continue sur un segment, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Solution de l'exercice 9.

(1) ι : iota minuscule

(2) H : eta majuscule

(3) δ : delta minuscule

(4) P : rho majuscule