Université d'Angers – 2023/2024

Analyse approfondie

CC du 6 décembre 2023.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

(1) Écrire sous forme d'un énoncé avec quantificateurs que $\mathbb{R}$ est archimédien.

(2) Montrer que $\forall x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \frac{1}{n} < x < n$.

Exercice 2.

(1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

(2) En déduire la valeur de $\left\lfloor \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

Exercice 3.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(1) Montrer que f est bornée.

(2) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
On considère la subdivision $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
Montrer que $U_P(f) - L_P(f) = \dfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.

(3) En déduire que f est intégrable.

Exercice 4.

Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables et calculer leurs intégrales.

(1) $f : \begin{array}{ccc} [-1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x|x| \end{array}$

(2) $g : \begin{array}{ccc} [1,42] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \min(x,\pi) \end{array}$

Exercice 5.

(1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.
Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

(2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

Exercice 6.

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

(1) Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée.

(2) Étudier les variations de f.

(3) Montrer que $\forall x > 0,\ e^{-2x}\ln(2) \leq f(x) \leq e^{-x}\ln(2)$.

(4) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 7.
Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

(2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$

Exercice 8.
Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : (1) σ (2) Γ (3) Λ (4) γ

Solution de l'exercice 1.

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall A > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $n\varepsilon > A$.

(2) Soit $x > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 > x$.
De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_2 x > 1$.
Posons $n \coloneqq \max(n_1, n_2, 1)$ alors $n \geq 1 > 0$, $n \geq n_1 > x$ et $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_2} < x$.
On a bien montré que $\forall x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{n} < x < n$.

Solution de l'exercice 2.

(1) *Méthode 1.* Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Alors

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

et

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

On a bien montré que $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

Méthode 2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 < \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^2 = 2k + 1 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{k} &\implies 2\sqrt{k+1}\sqrt{k} - 2k < 1 \\ &\implies \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 < \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^2 = 2k - 1 - 2\sqrt{k}\sqrt{k-1} &\implies 1 < 2k - 2\sqrt{k}\sqrt{k-1} \\ &\implies \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \end{aligned}$$

On a bien montré que $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

Méthode 3. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
La fonction $f : \begin{array}{ccc} [k, k+1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est dérivable sur $[k, k+1]$, donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $\dfrac{f(k+1) - f(k)}{(k+1) - k} = f'(c)$, i.e.

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

La fonction $g : \begin{array}{ccc} [k-1, k] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est continue sur $[k-1, k]$ et dérivable sur $]k-1, k[$, donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $d \in]k-1, k[$ tel que $\dfrac{g(k) - g(k-1)}{k - (k-1)} = g'(d)$, i.e.

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{2\sqrt{d}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

On a bien montré que $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

(2) On déduit de la question précédente que

$$\sum_{k=1}^{10000}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{10000}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

$$\Longrightarrow 99 < \sqrt{10001}-1 < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{10000} = 100$$

Donc $\left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 99$.

Solution de l'exercice 3.

(1) Soit $x \in [a,b]$. Puisque f est croissante, on déduit de $a \leq x \leq b$ que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
On a montré que $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M$, i.e. que f est bornée.

(2) On a

$$U_P(f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left(x_k - x_{k-1}\right)\sup_{[x_{k-1},x_k]}(f)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}f(x_k)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

et

$$L_P(f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left(x_k - x_{k-1}\right)\inf_{[x_{k-1},x_k]}(f)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}f(x_{k-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1}).$$

Ainsi

$$U_P(f) - L_P(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

(3) Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) = 0$, il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$.
Considérons la subdivision $P \coloneqq \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, alors

$$U_P(f) - L_P(f) = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon.$$

On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P$ subdivision de $[a,b]$, $U_P(f) - L_P(f) \leq \varepsilon$, i.e. que f est intégrable.

Solution de l'exercice 4.

(1) La fonction f est continue sur le segment $[-1,2]$ et est donc intégrable.
On déduit de la relation de Chasles que

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} x|x|dx = \int_{-1}^{0} x|x|dx + \int_{0}^{2} x|x|dx = -\int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{2} x^2 dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{7}{3}.$$

(2) La fonction g est continue sur le segment $[1,42]$ et est donc intégrable.
On déduit de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned}\int_{1}^{42} f(x)dx &= \int_{1}^{42}\min(x,\pi)dx = \int_{1}^{\pi}\min(x,\pi)dx + \int_{\pi}^{42}\min(x,\pi)dx = \int_{1}^{\pi} xdx + \int_{\pi}^{42}\pi dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{\pi} + \pi(42-\pi) = 42\pi - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.

(1) *Méthode 1.* Nous allons montrer la contraposée, i.e. $\exists x \in [a,b],\ f(x) \neq 0 \implies \displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq 0$.
Supposons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |x - x_0| \leq \eta \implies \left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \frac{f(x_0)}{2}$.

- Premier cas : $x_0 \in]a,b[$.
Posons $\delta \coloneqq \min\left(\eta, \frac{x_0-a}{2}, \frac{b-x_0}{2}\right)$ alors la subdivision $P \coloneqq \{a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b\}$ est bien définie et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx &\geq \left(x_0 - \delta - a\right) \inf_{[a,x_0-\delta]}(f) + 2\delta \inf_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}(f) + (b - x_0 - \delta) \inf_{[x_0+\delta,n]}(f) \\ &\geq 2\delta \inf_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}(f) \quad \text{puisque } f \geq 0 \\ &\geq \delta f(x_0) \quad \text{puisque } \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta],\ f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

- Deuxième cas : $x_0 = a$.
Posons $\delta \coloneqq \min\left(\eta, \frac{b-a}{2}\right)$ alors la subdivision $P \coloneqq \{a < a + \delta < b\}$ est bien définie et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx &\geq \delta \inf_{[a,a+\delta]}(f) + (b - a - \delta) \inf_{[a+\delta,n]}(f) \\ &\geq \delta \inf_{[a,a+\delta]}(f) \quad \text{puisque } f \geq 0 \\ &\geq \frac{\delta}{2} f(x_0) \quad \text{puisque } \forall x \in [a, a+\delta],\ f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

- Troisième cas : $x_0 = b$.
Posons $\delta \coloneqq \min\left(\eta, \frac{b-a}{2}\right)$ alors la subdivision $P \coloneqq \{a < b - \delta < b\}$ est bien définie et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx &\geq (b - \delta - a) \inf_{[a,b-\delta]}(f) + \delta \inf_{[b-\delta,b]}(f) \\ &\geq \delta \inf_{[b-\delta,b]}(f) \quad \text{puisque } f \geq 0 \\ &\geq \frac{\delta}{2} f(x_0) \quad \text{puisque } \forall x \in [b-\delta, b],\ f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

Pour les deuxième et troisième cas, lorsque $x_0 \in \{a,b\}$, on aurait aussi pu directement se ramener au premier cas en montrant qu'il existe alors $x_1 \in]a,b[$ tel que $f(x_1) > 0$.

Méthode 2. Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.
Définissons $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable et $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x) \geq 0$.
Ainsi F est croissante, $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$ et $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$.
Donc F est constante et ainsi $\forall x \in [a,b],\ f(x) = F'(x) = 0$.

(2) D'après l'hypothèse, en prenant $g = f$, il vient $\displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx = 0$.
Or f^2 est une fonction continue et positive.
Ainsi, d'après la question précédente, $\forall x \in [a,b],\ f(x)^2 = 0$ et donc $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

Solution de l'exercice 6.

(1) Puisque la fonction $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^{-x}}{x} \end{array}$ est continue, on déduit du théorème fondamental de l'analyse que la fonction $F\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $F'(x)=\frac{e^{-x}}{x}$.
On déduit de la relation de Chasles que

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt=\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_1^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt=\int_1^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_1^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt=F(2x)-F(x).$$

Ainsi f est dérivable par opérations élémentaires sur des fonctions dérivables et

$$f'(x)=2F'(2x)-F'(x)=\frac{e^{-2x}}{x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}.$$

(2) Soit $x\in]0,+\infty[$ alors $2x>x$, d'où $e^{-2x}<e^{-x}$ et ainsi $f'(x)=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}<0$.
Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

(3) Soit $x>0$, alors

$$\begin{aligned}\forall t\in[x,2x],\ \frac{e^{-2x}}{t}\leq\frac{e^{-t}}{t}\leq\frac{e^{-x}}{t} &\Longrightarrow \int_x^{2x}\frac{e^{-2x}}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-x}}{t}dt\\ &\Longrightarrow e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\leq f(x)\leq e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\\ &\Longrightarrow e^{-2x}\big(\ln(2x)-\ln(x)\big)\leq f(x)\leq e^{-x}\big(\ln(2x)-\ln(x)\big)\\ &\Longrightarrow e^{-2x}\ln(2)\leq f(x)\leq e^{-x}\ln(2)\end{aligned}$$

(4) Puisque $\forall x>0,\ e^{-2x}\ln(2)\leq f(x)\leq e^{-x}\ln(2)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}\ln(2)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln(2)=0$, on déduit du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

De même, puisque $\forall x>0,\ e^{-2x}\ln(2)\leq f(x)\leq e^{-x}\ln(2)$, $\lim\limits_{x\to0}e^{-2x}\ln(2)=\ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to0}e^{-x}\ln(2)=\ln(2)$, on déduit du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x\to0}f(x)=\ln(2).$$

Solution de l'exercice 7.

(1) Puisque la fonction $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x) \end{array}$ est continue sur un segment, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)+1}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2x)+2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On aurait aussi pu considérer la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(\pi x) \end{array}$.

(2) Remarquons que

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}\right) = -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) = -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Puisque la fonction $\begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ est continue sur un segment, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \ln(x)dx = \left[x\ln(x)-x\right]_1^2 = 2\ln(2)-1.$$

On aurait aussi pu considérer la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array}$.

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = \lim_{n\to+\infty} e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e}.$$