Université d'Angers – 2023/2024

Analyse approfondie

CC du 18 octobre 2023.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.
Que signifie que $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet ?

Exercice 2.
Montrer que $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.

1. (a) Montrer que $\forall a, b > 0,\ \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \dfrac{a+b}{2}$.
   (b) Étudier le cas d'égalité (*i.e. donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité, en justifiant*).
2. Déduire du résultat de la question précédente que $\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 4.
Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides et bornées. On définit $AB \coloneqq \{ab \ :\ a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que AB admet une borne supérieure.
2. A-t-on nécessairement $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?

Exercice 5.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée telle que $\sup(A) > 0$.
Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $a > 0$.

Exercice 6.

1. Montrer que la fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est croissante.
2. Montrer que $\forall x \geq 0,\ \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$.

Exercice 7.
Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer (en justifiant), lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément :

1. $]0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$
2. $\left\{ \frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}$.

Exercice 8.
Les nombres suivants sont-ils rationnels ? Justifier.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{16}$

Solution de l'exercice 1.
Dire que $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet signifie que toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Solution de l'exercice 2.
Méthode 1.
Notons $\alpha \coloneqq \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ alors

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}\\ &= 8-2\sqrt{16-4\times 3}\\ &= 4\end{aligned}$$

Donc $\alpha \in \{\pm 2\} \subset \mathbb{Z}$.

Commentaire : on peut vérifier que $\alpha = -2$ mais ce n'était pas demandé. En effet, comme $4-2\sqrt{3} \leq 4+2\sqrt{3}$, on déduit de la croissance de la fonction racine carrée que $\sqrt{4-2\sqrt{3}} \leq \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ et donc que $\alpha \leq 0$.

Méthode 2.

$$\begin{aligned}\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\\ &= \sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1 && \text{car } \sqrt{3}-1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{3}+1 \geq 0\\ &= -2 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.

1. (a) Soient $a, b > 0$ alors

$$\begin{aligned}a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \geq 0 &\implies a^2+2ab+b^2 \geq 4ab\\ &\implies (a+b)^2 \geq 4ab\\ &\implies \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} && \text{car } a+b>0\end{aligned}$$

On a bien montré que $\forall a, b > 0,\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$.

Commentaires :

- *On peut aussi raisonner par équivalences en partant de l'inégalité souhaitée.*
- *Cette inégalité stipule que la moyenne harmonique est inférieure à la moyenne arithmétique. Il s'agit de l'une des inégalités de moyennes : pour $a, b > 0$, on a*

$$0 < \min(a,b) \leq \underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{\text{moyenne harmonique}} \leq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{moyenne géométrique}} \leq \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{moyenne arithmétique}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}_{\text{moyenne quadratique}} \leq \max(a,b)$$

(b) Soient $a, b > 0$.

- Supposons $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2} &\implies \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b}{2}\\ &\implies 4ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\\ &\implies a^2 - 2ab + b^2 = 0\\ &\implies (a-b)^2 = 0\\ &\implies a - b = 0\\ &\implies a = b\end{aligned}$$

- Si $a = b$ alors $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{2}{a}} = a$ et $\frac{a+b}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

On a montré que

$$\forall a, b > 0,\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$$

Commentaire : il est possible de raisonner par équivalences, mais, avec un raisonnement par implications comme ci-dessus, il ne faut pas oublier de vérifier la réciproque.

2. Soit $x > 0$. Puisque $x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+\frac{1}{x}} \le \frac{x+\frac{1}{x}}{2} &\implies \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \ge 4 \qquad \text{car } x+\frac{1}{x} > 0\\ &\implies x + \frac{1}{x} \ge 2 \qquad \text{car la fonction racine carrée est croissante et } x+\frac{1}{x} > 0\end{aligned}$$

On a bien montré que $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \ge 2$.

Commentaire : on pouvait aussi utiliser $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solution de l'exercice 4.

1. - Puisque A et B sont non-vides, il existe $a \in A$ et $b \in B$. Alors $ab \in AB$ et donc $AB \neq \varnothing$.
   - Puisque A et B sont bornées, il existe $M_A > 0$ et $M_B > 0$ tels que

$$\forall a \in A,\ |a| \le M_A$$

et

$$\forall b \in B,\ |b| \le M_B.$$

Soit $x \in AB$ alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = ab$.
Ainsi $|x| = |ab| = |a||b| \le M_A M_B$ puisque $|a| \ge 0$ et $|b| \ge 0$.
On a montré que $\forall x \in AB,\ |x| \le M_A M_B$, ainsi AB est bornée et donc majorée.

Puisque AB est non-vide et majorée, on en déduit que AB admet une borne supérieure.

2. Non, l'égalité $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ n'est pas nécessairement vraie lorsque A et B sont deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$.
En effet, posons $A \coloneqq \{-1\}$ et $B \coloneqq \{1, 2\}$.
Alors A et B sont non-vides et bornées. De plus $\sup(A) = \max(A) = -1$ et $\sup(B) = \max(B) = 2$.
Comme $AB = \{-2, -1\}$, on a que $\sup(AB) = \max(AB) = -1 \neq -2 = \sup(A)\sup(B)$.

Commentaire : lorsque l'on choisissait deux intervalles A et B, il suffisait d'exhiber un élément de AB strictement supérieur à $\sup(A)\sup(B)$ pour conclure (il n'était pas nécessaire de calculer AB).
Par exemple prenons $A := [1,2]$ et $B := [-2,-1]$ alors $\sup(A) = 2$ et $\sup(B) = -1$.
Puisque $-1 = 1\times(-1) \in AB$ et que $-1 > -2 = \sup(A)\sup(B)$, on a que $\sup(A)\sup(B)$ n'est pas un majorant de AB (et donc que $\sup(AB) \neq \sup(A)\sup(B)$).

Solution de l'exercice 5.
Méthode 1.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée telle que $\sup(A) > 0$.
Puisque $0 < \sup(A)$ et que $\sup(A)$ est le plus petit des majorants, on a que 0 n'est pas un majorant de A.
Ainsi il existe $a \in A$ tel que $a > 0$.

Méthode 2.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée telle que $\sup(A) > 0$.
Supposons par l'absurde que $\forall a \in A,\ a \leq 0$.
Alors 0 est un majorant de A et donc $\sup(A) \leq 0$ puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants.
D'où une contradiction. Ainsi il existe $a \in A$ tel que $a > 0$.

Méthode 3.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée telle que $\sup(A) > 0$.
Posons $\varepsilon := \frac{\sup(A)}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$. Donc il existe $a \in A$ tel que $a > \sup(A) - \varepsilon = \frac{\sup(A)}{2} > 0$.

Solution de l'exercice 6.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$.
   Par définition de la partie entière, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$.
   Ainsi $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$.
   Puisque $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$ et qu'il s'agit d'une inégalité entre entiers, on a $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
   On a ainsi montré que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$, i.e. que la fonction partie entière est croissante.

   Commentaire : de l'inégalité $\lfloor x \rfloor \leq y$, on peut aussi directement déduire que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ puisque $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et que $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à y.
   Il y avait d'autres méthodes similaires (par exemple en montrant la contraposée).

2. Soit $x \geq 0$.
   On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x$.
   Donc $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x}$ puisque la fonction racine carrée est croissante.
   Comme la fonction partie entière est croissante, on obtient $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$.

   De même, on a

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor \leq \sqrt{x} &\implies \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2 \leq x && \text{car la fonction carrée est croissante sur } [0,+\infty[\\
&\implies \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2 \leq \lfloor x \rfloor && \text{car la fonction partie entière est croissante} \\
&\implies \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} && \text{car la fonction racine carrée est croissante} \\
&\implies \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor && \text{car la fonction partie entière est croissante}
\end{aligned}$$

   À la deuxième et à la dernière implication, on a utilisé que la partie entière d'un entier est lui-même pour le terme de gauche de l'inégalité.

   Par antisymétrie de l'ordre, il s'ensuit que $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$.

Solution de l'exercice 7.

1. Notons $E :=]0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$.
   - Montrons que $\inf(E) = 0$.
     Soit $x \in E$, alors $x > 0$. Donc 0 est un minorant de E.
     Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \varepsilon$.
     Puisque $q \in E$, on en déduit que ε n'est pas un minorant de E.
     Donc 0 est le plus grand des minorants de E, i.e. $\inf(E) = 0$.
   - Puisque $0 \notin E$, on en déduit que E n'a pas de plus petit élément (sinon, ce serait la borne inférieure).
   - Comme $\inf(E) = 0$, l'ensemble des minorants de E est $]-\infty, 0]$.
   - Montrons que E n'est pas majoré.
     Soit $M > 0$, alors, puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M$.
     Puisque $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ et $n > M > 0$, il s'ensuit que $n \in E$.
     On a bien montré que $\forall M > 0,\ \exists n \in E,\ n > M$.
   - Ainsi E n'est pas majoré, n'a pas de plus grand élément et n'a pas de borne supérieure.

2. Notons $F := \left\{ \frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}$.
   - Montrons que $\inf(F) = 0$.
     Soit $x \in F$ alors il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $x = \frac{1}{n}$, donc $x > 0$. Ainsi 0 est un minorant de F.
     Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > 1$.
     Posons $\tilde{n} := \max(n, 2)$ alors $\frac{1}{\tilde{n}} \in F$. De plus $\tilde{n}\varepsilon \geq n\varepsilon > 1$, d'où $\frac{1}{\tilde{n}} < \varepsilon$.
     Ainsi ε n'est pas un minorant de F et donc 0 est le plus grand des minorants de F, i.e. $\inf(F) = 0$.
   - Puisque $0 \notin F$, on en déduit que F n'a pas de plus petit élément (sinon, ce serait la borne inférieure).
   - Comme $\inf(F) = 0$, l'ensemble des minorants de F est $]-\infty, 0]$.
   - Montrons que $\max(F) = \frac{1}{2}$.
     Soit $x \in F$, alors il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $x = \frac{1}{n}$. On déduit de $n \geq 2$ que $x = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$.
     On a bien montré que $\forall x \in F,\ x \leq \frac{1}{2}$.
     Puisque $\frac{1}{2} \in F$, on en déduit que $\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de F, i.e. que $\max(F) = \frac{1}{2}$.
   - Comme le plus grand élément de F est forcément la borne supérieure de F, on a $\sup(F) = \frac{1}{2}$.
   - Puisque $\sup(F) = \frac{1}{2}$, il s'ensuit que l'ensemble des majorants de F est $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Solution de l'exercice 8.

1. *Méthode 1.*
   Supposons par l'absurde que $\alpha = \sqrt{8} \in \mathbb{Q}$.
   Alors, comme $\alpha = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$, on a $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{2} \in \mathbb{Q}$. D'où une contradiction.
   Ainsi $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   Méthode 2.
   Supposons par l'absurde que $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}$ alors, puisque $\sqrt{8} > 0$, il existe $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\sqrt{8} = \frac{a}{b}$.
   D'où $2^3 b^2 = a^2$.
   Ainsi 2 apparaît un nombre impair de fois dans la décomposition primaire de $2^3 b^2$ et un nombre pair de fois dans la décomposition primaire de a^2. D'où une contradiction avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.
   Ainsi $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$