Continuité uniforme

25 octobre 2023

Continuité uniforme : définition

Définition : continuité (rappel)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* si

Continuité uniforme : définition

Définition : continuité (rappel)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* si

$$\forall x_1 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Continuité uniforme : définition

Définition : continuité (rappel)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* si

$$\forall x_1 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Définition : continuité uniforme

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Continuité uniforme : définition

Définition : continuité (rappel)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* si

$$\forall x_1 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Définition : continuité uniforme

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

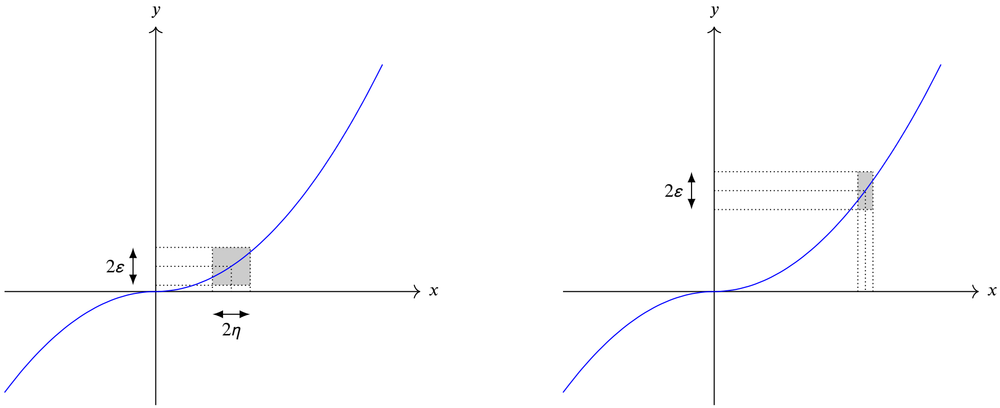
Différence entre continuité et continuité uniforme

Syntactiquement, le quantificateur universel sur x_1 est positionné différemment, ainsi :

- La continuité est une notion locale puisque η dépend de ε et *(du comportement de f au voisinage)* de x_1,
- La continuité uniforme est une notion globale puisque η doit être choisi indépendamment de x_1 et dépendre seulement ε *(ainsi η dépend du comportement de f sur tout son domaine)*,
- En particulier, **une fonction uniformément continue est continue**.

Continuité uniforme : interprétation graphique – 1

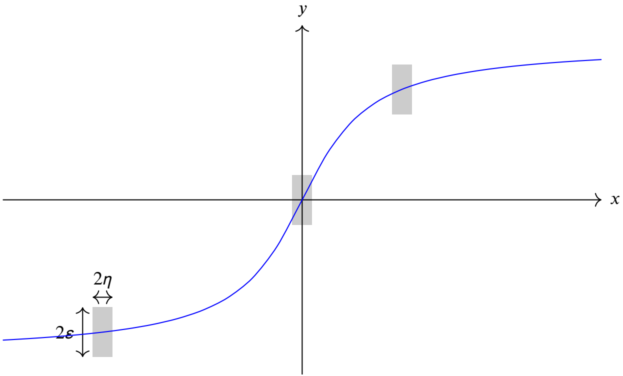
Exemple de fonction continue mais pas uniformément continue :



Étant donné $\varepsilon > 0$, plus on regarde à droite, plus il est nécessaire de choisir un η petit afin que le graphe ne quitte pas le rectangle obtenu par le haut ou par le bas.
Formellement : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x_1, x_2 \in D,\ \left(|x_1 - x_2| < \eta \text{ et } |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\right)$.

Continuité uniforme : interprétation graphique – 2

Exemple de fonction uniformément continue :



Lorsque l'on fixe $\varepsilon > 0$ (i.e. la hauteur du rectangle), aussi petit soit-il, on peut toujours trouver $\eta > 0$ (i.e. la largeur du rectangle) de sorte qu'en centrant le rectangle n'importe où sur le graphe alors ce dernier ne quitte jamais le rectangle par le bas ou par le haut.

Formellement : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ |x_1 - x_2| < \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Continuité uniforme : le théorème de Heine

On a vu qu'une fonction uniformément continue est continue et que la réciproque est généralement fausse. Néanmoins, l'énoncé suivant stipule que les deux notions coïncident lorsque le domaine est un segment.

Théorème de Heine

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est uniformément continue.

Continuité uniforme : le théorème de Heine

On a vu qu'une fonction uniformément continue est continue et que la réciproque est généralement fausse. Néanmoins, l'énoncé suivant stipule que les deux notions coïncident lorsque le domaine est un segment.

Théorème de Heine

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est uniformément continue.

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $A := \left\{x \in [a,b] \ : \ \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in [a,x], |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon\right\}$.
Alors $A \neq \varnothing$ puisque $a \in A$ et A est majoré par b. Donc $S := \sup(A)$ existe et vérifie $a \leq S \leq b$.
Supposons par l'absurde que $S < b$.

- Par continuité de f en S, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in [a,b], |x - S| \leq \eta_1 \implies |f(x) - f(S)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
- Par définition de S, il existe $c \in A$ tel que $S - \eta_1 < c \leq S$;
  alors, puisque $c \in A$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in [a,c], |x_1 - x_2| \leq \eta_2 \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Posons $\eta := \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et notons $\tilde{b} := \min(b, S + \eta_1)$.
Soient $x_1, x_2 \in [a, \tilde{b}]$ tels que $|x_1 - x_2| \leq \eta$,

- si $x_1, x_2 \leq c$ alors $x_1, x_2 \in [a,c]$ et $|x_1 - x_2| \leq \eta \leq \eta_2$, d'où $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$;
- si $x_1, x_2 \geq c$ alors $|x_i - S| \leq \eta_1$, d'où
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(S) + f(S) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(S)| + |f(x_2) - f(S)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon;$$
- si $x_2 \leq c \leq x_1$ alors, puisque $|x_2 - c| \leq |x_1 - x_2| \leq \eta \leq \eta_2$, $|c - S| \leq \eta_1$ et $|x_1 - S| \leq \eta_1$, on a
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(c)| + |f(c) - f(S)| + |f(S) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc $\tilde{b} \in A$. Or $\sup(A) = S < \tilde{b}$, d'où une contradiction. Ainsi $\sup(A) = b$.

En raisonnant comme ci-dessus (en utilisant la continuité en b), on montre que $b \in A$. ■