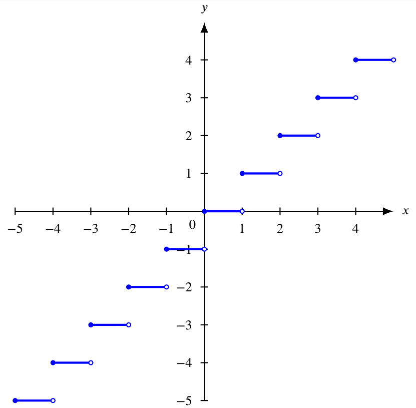
L'ensemble des nombres réels (suite et fin)

4 octobre 2023

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.



Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence pour $x \geq 0$.
Posons $E \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ x < n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $E \neq \varnothing$.
Donc $p \coloneqq \min(E)$ est bien défini *(car $\mathbb{N}$ est bien ordonné)*.
Puisque $p \in E$, on a $x < p$.
Puisque $p - 1 \notin E$, on a $p - 1 \leq x$.
Donc $n \coloneqq p - 1$ vérifie $n \leq x < n + 1$.

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

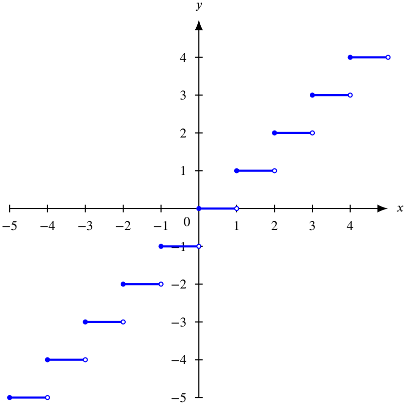
Existence pour $x \geq 0$.
Posons $E := \{n \in \mathbb{N} \ : \ x < n\}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que $E \neq \varnothing$.
Donc $p := \min(E)$ est bien défini *(car $\mathbb{N}$ est bien ordonné)*.
Puisque $p \in E$, on a $x < p$.
Puisque $p - 1 \notin E$, on a $p - 1 \leq x$.
Donc $n := p - 1$ vérifie $n \leq x < n + 1$.

Unicité. Supposons que $n, n' \in \mathbb{Z}$ vérifient $n \leq x < n + 1$ et $n' \leq x < n' + 1$.
Alors $n - n' - 1 < 0 < n - n' + 1$ d'où $-1 < n' - n < 1$.
Puisque $n' - n \in \mathbb{Z}$, on a $n - n' = 0$, i.e. $n' = n$. ∎

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.



Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

Corollaire

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Théorème

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 1 : par le théorème fondamental de l'arithmétique.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
Alors $2b^2 = a^2$.
La décomposition primaire de $2b^2$ contient un nombre impair de facteurs premiers (comptés avec les exposants) alors que la décomposition primaire a^2 contient un nombre pair de facteurs premiers (comptés avec les exposants).
D'où une contradiction avec l'unicité de la factorisation en facteurs premiers. $\blacksquare$

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 2 : par le lemme d'Euclide.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

Alors $2b^2 = a^2$ d'où $2|a^2$.

D'après le lemme d'Euclide, $2|a$ et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.

Puis $2b^2 = a^2 = 4k^2$, i.e. $b^2 = 2k^2$.

Donc $2|b^2$ et ainsi $2|b$, toujours d'après le lemme d'Euclide.

Donc $2| \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$; d'où une contradiction. ∎

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 3 : par le lemme de Gauss.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.
Alors $2b^2 = a^2$ d'où $b|a^2$.
Puisque $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, on déduit du lemme de Gauss que $b|1$ et donc $b = 1$.
Ainsi $a^2 = 2$, or

- si $a \equiv 0 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 0 \mod 3$,
- si $a \equiv 1 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \mod 3$ et
- si $a \equiv 2 \mod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \mod 3$.

D'où une contradiction. ∎

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 4 : par congruence.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

On ne peut pas avoir $a \equiv 0 \mod 3$ et $b \equiv 0 \mod 3$, sinon on aurait $3 | \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

- Premier cas : si $a \equiv \pm 1 \mod 3$ et $b \equiv 0 \mod 3$, alors $a^2 - 2b^2 \equiv 1 \mod 3$,
- Deuxième cas : si $a \equiv 0 \mod 3$ et $b \equiv \pm 1 \mod 3$, alors $a^2 - 2b^2 \equiv 1 \mod 3$,
- Troisième cas : si $a \equiv \pm 1 \mod 3$ et $b \equiv \pm 1 \mod 3$, alors $a^2 - 2b^2 \equiv 2 \mod 3$.

Donc $a^2 - 2b^2 \not\equiv 0 \mod 3$ ce qui implique que $a^2 - 2b^2 \neq 0$; d'où une contradiction. ∎

Démonstration 5 : par le principe du bon ordre.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
Alors $E \coloneqq \left\{ n \in \mathbb{N} \ : \ n\sqrt{2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ est non-vide puisque $b \in E$ ($b\sqrt{2} = a \in \mathbb{N}$).
Puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné, E admet un plus petit élément $p \coloneqq \min(E)$.
On sait que $p\sqrt{2} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et on pose $q \coloneqq p\sqrt{2} - p$. Alors $q \in \mathbb{Z}$.
De plus $q = p(\sqrt{2} - 1)$ de sorte que $0 < q < p$.
Mais $q\sqrt{2} = 2p - p\sqrt{2} = p - q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donc $q \in E$.
D'où une contradiction puisque $q \in E$ et $q < p = \min(E)$. ■

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 6 : par la propriété archimédienne.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n := \left(\sqrt{2}-1\right)^n$.

En utilisant la formule du binôme de Newton (ou une récurrence), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $u_n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on déduit de $2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$ que $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$.

Donc $0 < u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Supposons par contradiction que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$ alors

$$u_n = a_n + b_n\sqrt{2} = a_n + b_n\frac{p}{q} = \frac{qa_n + pb_n}{q}.$$

Puisque $u_n > 0$, on a $|qa_n + pb_n| \geq 1$ et $u_n \geq \frac{1}{q}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{q} \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Ce qui contredit la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$ (ou que $\lim \frac{1}{2^n} = 0$). ■

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 7 : par descente infinie.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
Alors $a^2 = 2b^2$, d'où $a(a-b) = a^2 - ab = 2b^2 - ab = b(2b-a)$.
Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.
Puisque $1 < \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, on a $0 < a - b$. Et ainsi $0 < 2b - a$, d'où $a - b < b$.
En répétant ce processus, on obtient $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots$ où $a_k > 0$ et $0 < b_{k+1} < b_k$.
Ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. ∎

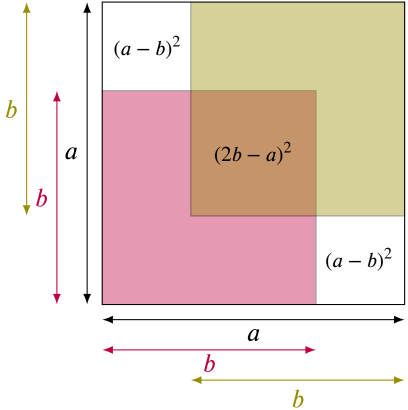
Démonstration 8 : une version géométrique de la descente infinie.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.

Alors $a = \sqrt{2}b > b$.
L'aire du carré au centre est $\mathcal{A} = (2b-a)^2$.
De plus, par inclusion-exclusion, $2(a-b)^2 + 2b^2 - \mathcal{A} = a^2$.
Donc $\mathcal{A} = 2(a-b)^2 + 2b^2 - a^2 = 2(a-b)^2$ puisque $a^2 = 2b^2$.

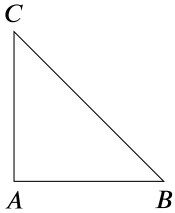
Ainsi $2(a-b)^2 = \mathcal{A} = (2b-a)^2$, d'où $2 = \dfrac{(2b-a)^2}{(a-b)^2}$.

Donc $\sqrt{2} = \dfrac{2b-a}{a-b}$ avec $0 < 2b-a$ et $0 < a-b < b$.
En répétant ce processus, on construit une suite infinie de fractions $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots$ où $a_k > 0$ et $0 < b_{k+1} < b_k$.
Ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. ∎



Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

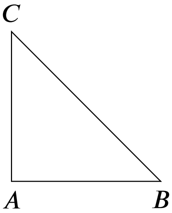
Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).
Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.



Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).

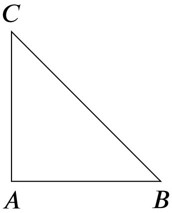
Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.



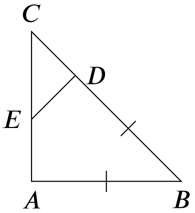
Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).



Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.

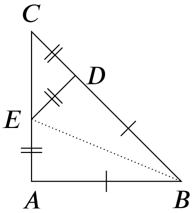
Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).



Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

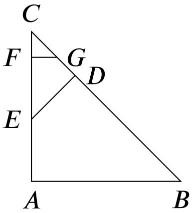
Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).



Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d \coloneqq \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore.
De plus le triangle CDE est isocèle et rectangle en A donc $\overline{ED} = \overline{DC}$.
Ainsi $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AB}$ et $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AB} - (\overline{BC} - \overline{AB}) = 2\overline{AB} - \overline{BC}$ sont multiples entiers de d.

Quelques nombres irrationnels : $\sqrt{2}$

Démonstration 9 : démonstration classique
(aka une autre version géométrique de la descente infinie).



Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$.
En posant $d := \frac{\overline{AB}}{b}$, il vient $\overline{AB} = bd$ et $\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = ad$.
Donc $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ sont commensurables, i.e. multiples entiers d'une même longueur d.
Choisissons D sur $[BC]$ tel que $\overline{BD} = \overline{AB}$ et notons par E l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par D.
Les triangles BAE et BDE sont rectangles en A et D, respectivement, d'hypothénuse commune et $\overline{AB} = \overline{DB}$, donc $\overline{AE} = \overline{ED}$ d'après le théorème de Pythagore.
De plus le triangle CDE est isocèle et rectangle en A donc $\overline{ED} = \overline{DC}$.
Ainsi $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{AB}$ et $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AB} - (\overline{BC} - \overline{AB}) = 2\overline{AB} - \overline{BC}$ sont multiples entiers de d.
Puisque DEC est isocèle et rectangle en D, on peut répéter cette construction avec le triangle DEC de sorte à construire une suite infinie de segment $(AC, EC, FC, \dots)$ multiples entiers de d dont la longueur diminue. Ce qui est impossible. ∎

Quelques nombres irrationnels : e

Théorème

$$e \notin \mathbb{Q}$$

Quelques nombres irrationnels : e

Première démonstration.

On (r)appelle que $e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Supposons par l'absurde que $e = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Alors $b > 1$ puisque $e \notin \mathbb{N}$.

De plus,

$$b! \left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!} \right) = b! \left(\sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!} \right).$$

On obtient une contradiction en remarquant que le terme de gauche est un entier alors que le terme de droite n'en est pas un, en effet :

$$0 < b! \left(\sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(b+1)^n} = \frac{1}{b} < 1.$$

Quelques nombres irrationnels : e

Deuxième démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$.

Par récurrence et en utilisant la formule d'intégration par parties, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $u_n = a_n + e b_n$.

Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Alors $0 < u_n = a_n + b_n \dfrac{p}{q} = \dfrac{q a_n + p b_n}{q}$.

Puisque $u_n > 0$, on a que $q a_n + p b_n \geq 1$ et que $u_n \geq \dfrac{1}{q}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{q} \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e \mathrm{d}x = \dfrac{e}{n+1}$.

D'où une contradiction en faisant tendre n vers l'infini. ∎

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y).$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
Posons $\varepsilon := y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m := \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ∎

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
Posons $\varepsilon := y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m := \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ■

Corollaire

Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
Posons $\varepsilon := y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m := \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1$, et donc $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$. ∎

Corollaire

Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Démonstration. Puisque I n'est pas vide et n'est pas un singleton, il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
Puisque I est un intervalle, on a que $q \in I$.
Ainsi $q \in I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. ∎

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$$

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
D'après la diapositive précédente, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
De même, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < q$.
Ainsi, on $p, q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x < p < q < y$.
Posons $s \coloneqq p + \frac{\sqrt{2}}{2}(q - p)$.
Alors $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sinon on aurait $\sqrt{2} = 2\dfrac{s-p}{q-p} \in \mathbb{Q}$.
De plus, $p < s < q$ puisque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
On a bien construit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < s < y$. ∎

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies (\exists s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < s < y)$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
D'après la diapositive précédente, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
De même, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < q$.
Ainsi, on $p, q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x < p < q < y$.
Posons $s := p + \frac{\sqrt{2}}{2}(q - p)$.
Alors $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sinon on aurait $\sqrt{2} = 2\dfrac{s-p}{q-p} \in \mathbb{Q}$.
De plus, $p < s < q$ puisque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
On a bien construit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < s < y$. ■

Corollaire

Soit I un intervalle non-vide et non réduit à un point, alors $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$.