L'ensemble des nombres réels (suite)

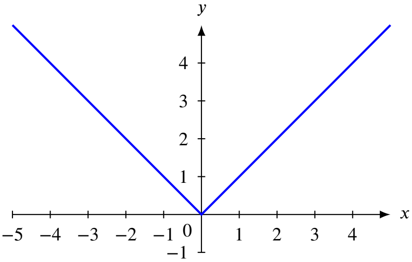
20 septembre 2023

Valeur absolue – 1

Définition : valeur absolue

On définit la fonction *valeur absolue* par

$$|\bullet| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$



Graphe de $y = |x|$.

Valeur absolue – 2

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
   (inégalité triangulaire)
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
    (inégalité triangulaire inversée)

Valeur absolue – 2

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ ou $x = -y)$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
   (inégalité triangulaire)
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
    (inégalité triangulaire inversée)

Proposition

Soient $a, x \in \mathbb{R}$, alors :

11. Si $a \geq 0$ alors $|x| = a \Leftrightarrow (x = a$ ou $x = -a)$
12. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
13. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
14. $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a$ ou $x \leq -a)$
15. $|x| > a \Leftrightarrow (x > a$ ou $x < -a)$

Minorants, majorants

Définition : majorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

Minorants, majorants

Définition : majorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

Définition : minorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est **un** *minorant* de A si $\forall x \in A,\ m \leq x$.

Définition : partie minorée/majorée/bornée

- Une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant).
- Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Minorants, majorants

Définition : majorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leq M$.

Définition : minorant

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est **un** *minorant* de A si $\forall x \in A,\ m \leq x$.

Définition : partie minorée/majorée/bornée

- Une partie de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant).
- Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Exercice

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. Écrire formellement à l'aide de quantificateurs que A est majorée.
2. Écrire formellement à l'aide de quantificateurs que A n'est pas majorée.

Borne supérieure – 1

Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.
On dit que S est **la** *borne supérieure* (ou **le** *supremum*) de A si S est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ x \leq S$,
2. si T est un majorant de A alors $S \leq T$.

On note alors $\sup(A) = S$.

Proposition : unicité de la borne supérieure

Si une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors cette dernière est unique.

Borne supérieure – 1

Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.
On dit que S est **la** *borne supérieure* (ou **le** *supremum*) de A si S est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire si

1. $\forall x \in A,\ x \leq S$,
2. si T est un majorant de A alors $S \leq T$.

On note alors $\sup(A) = S$.

Proposition : unicité de la borne supérieure

Si une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors cette dernière est unique.

De façon similaire, on appelle *borne inférieure* (ou *infimum*) d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ le plus grand des minorants de A. Si A admet une borne inférieure alors cette dernière est unique.

Borne supérieure – 2

Axiome : $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

Borne supérieure – 2

Axiome : $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

L'hypothèse *non-vide* est très importante !
Quels sont les majorants et minorants de $\varnothing$?

Borne supérieure – 2

Axiome : $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire

Une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet une borne inférieure.

L'hypothèse *non-vide* est très importante !
Quels sont les majorants et minorants de $\varnothing$?

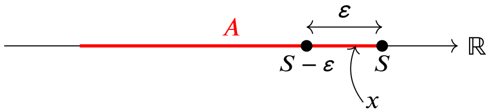
Convention

On note $\sup A = +\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-majorée.
On note $\inf A = -\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-minorée.

Proposition : caractérisation du supremum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$, alors

$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$

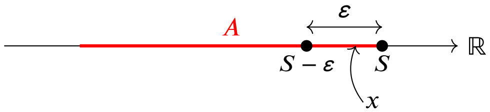


Borne supérieure – 3

Proposition : caractérisation du supremum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$, alors

$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x \end{cases}$$



Proposition : caractérisation de l'infimum *à la epsilon*

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $I \in \mathbb{R}$, alors

$$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ I \leq x \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < I + \varepsilon \end{cases}$$

Intervalles

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Lemme

Soit I un intervalle non-vide alors :

- Si I est minoré et majoré alors $\left]\inf(I), \sup(I)\right[\subset I \subset \left[\inf(I), \sup(I)\right]$;
- Si I est minoré et non-majoré alors $\left]\inf(I), +\infty\right[\subset I \subset \left[\inf(I), +\infty\right[$;
- Si I est non-minoré et majoré alors $\left]-\infty, \sup(I)\right[\subset I \subset \left]-\infty, \sup(I)\right]$;
- Si I est non-minoré et non-majoré alors $I =]-\infty, +\infty[$.

Intervalles

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I).$$

Proposition

Les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme suivante, où $a < b$:

- $\varnothing$
- $[a, a] = \{a\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\varepsilon > A.$

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall A > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > A.$

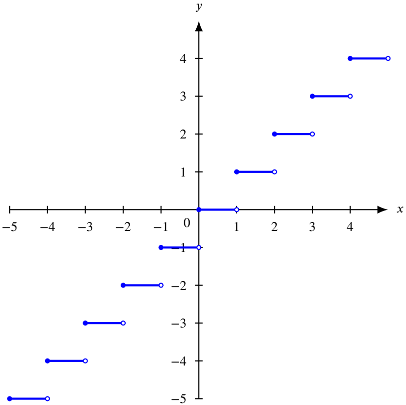
Le résultat ci-dessus stipule qu'il n'existe pas de nombre réel infinitésimal (i.e. infiniment petit ou infiniment grand).

Partie entière

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

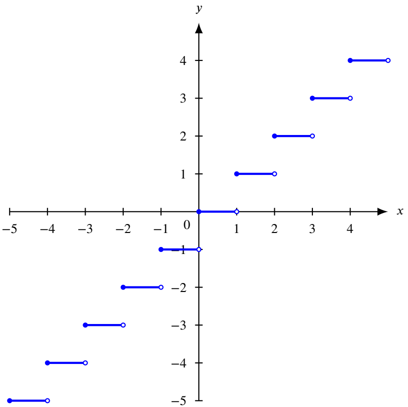


Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

Partie entière

Théorème : existence et unicité de la partie entière d'un réel

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On dit que n est la *partie entière* de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.



Graphe de $y = \lfloor x \rfloor$

Corollaire

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$