Présentation &
L'ensemble des nombres réels

12 septembre 2023

Analyse approfondie

- CM : Jean-Baptiste Campesato
  TD1 (DL-MI) : Jean-Baptiste Campesato
  TD2 (M2+PPE) : Gilles Stupfler
  TD3 (M1+M3) : Jean-Baptiste Campesato
- Séances (P6+P7) : 8 CM et 16 TD.
  Attention les horaires varient d'une semaine à l'autre !
- E-mail : `jb.campesato@univ-angers.fr`
- Notes de cours : `https://math.univ-angers.fr/~campesato/ens/aa.pdf`
- Diapositives : `https://math.univ-angers.fr/~campesato/ens.html`
- 1. Nombres réels (§2)
  2. Continuité uniforme (§8)
  3. Intégrale de Riemann (§9)

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif :
  1. L'addition est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x+y)+z = x+(y+z)$
  2. 0 est le neutre de l'addition : $\forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = 0+x = x$
  3. Existence d'un inverse additif : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (-x) \in \mathbb{R},\ x+(-x) = (-x)+x = 0$
  4. L'addition est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$
  5. La multiplication est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xy)z = x(yz)$
  6. 1 est le neutre de la multiplication : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
  7. La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
  $$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y+z) = xy + xz \ \text{ et } \ (x+y)z = xz + yz$$
  8. Existence d'un inverse multiplicatif : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R},\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
  9. La multiplication est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné :
  1. $\leq$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$
  2. $\leq$ est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y$ et $y \leq x) \implies x = y$
  3. $\leq$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y$ et $y \leq z) \implies x \leq z$
  4. $\leq$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ ou $y \leq x$
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$ est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps :
  1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$
  2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq xy$
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

L’ensemble des nombres réels

L’ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l’addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L’ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\quad \mathbb{R} \ni 0 \neq 1 \in \mathbb{R}$ $\quad$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Difficulté : il faut montrer l'existence et l'unicité (hors-programme).

L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(l'addition)*, $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(la multiplication)*, $\mathbb{R}\ni 0\neq 1\in\mathbb{R}$ et de la relation binaire $\leq$

est caractérisé par :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un corps commutatif.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.
- L'ordre est compatible avec la structure de corps.
- $\mathbb{R}$ est Dedekind-complet : toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.

Difficulté : il faut montrer l'existence et l'unicité (hors-programme).

Remarques (déjà bien connues)

- La multiplication est prioritaire sur l'addition : $x + yz = x + (yz)$,
- Si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ alors $\frac{x}{y} := xy^{-1}$,
- Étant donnés $x, y\in\mathbb{R}$, on note $x < y$ pour $(x\leq y$ et $x\neq y)$,
- …

Quelques conséquences

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$

Quelques conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
3. 0 est l'unique neutre additif
4. 1 est l'unique neutre multiplicatif
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x$ est l'unique inverse additif de x
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, x^{-1} est l'unique inverse multiplicatif de x
7. $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ -(-x) = x$
9. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x$
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$
11. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ (-x)^{-1} = -\left(x^{-1}\right)$
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$
13. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; de plus l'addition, la multiplication et l'ordre sur $\mathbb{Q}$ sont compatibles avec ceux de $\mathbb{R}$

Propriétés de l’ordre – 1

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{r}x \leq y\\ s \leq t\end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{r}x \leq y\\ s < t\end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$
15. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$
15. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$
16. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z > 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$
17. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z > 0,\ x < y \Leftrightarrow xz < yz$
18. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z < 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$
19. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z < 0,\ x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Propriétés de l'ordre – 1

1. $1 > 0$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s \leq y + t$
4. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ s < t \end{array}\right\} \Rightarrow x + s < y + t$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow -y < -x$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yz$
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$
9. $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq s \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow xs \leq yt$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$
12. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
13. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$
15. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$
16. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$
17. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z > 0,\ x < y \Leftrightarrow xz < yz$
18. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$
19. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z < 0,\ x < y \Leftrightarrow xz > yz$
20. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

Propriétés de l’ordre – 2

Proposition

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\left.\begin{array}{c} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \leq y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = y_i.$$

Propriétés de l'ordre – 2

Proposition

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\left.\begin{array}{c} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \leq y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = y_i.$$

Corollaire

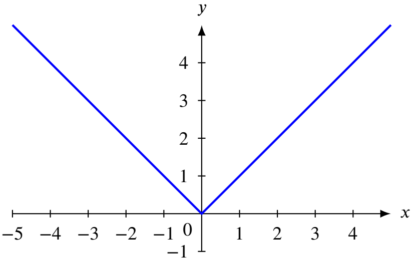
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0.$$

Définition : valeur absolue

On définit la fonction *valeur absolue* par

$$|\bullet| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$



Graphe de $y = |x|$.

Valeur absolue – 2

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ ou $x = -y)$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
   (inégalité triangulaire)
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
    (inégalité triangulaire inversée)

Valeur absolue – 2

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max(x, -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ ou $x = -y)$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$
   (inégalité triangulaire)
10. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$
    (inégalité triangulaire inversée)

Proposition

Soient $a, x \in \mathbb{R}$, alors :

1. Si $a \geq 0$ alors $|x| = a \Leftrightarrow (x = a$ ou $x = -a)$
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a$ ou $x \leq -a)$
5. $|x| > a \Leftrightarrow (x > a$ ou $x < -a)$