Université d'Angers – 2022/2023

# *Analyse approfondie*

Feuille d'exercices n°3

**Exercice 1.** Est-ce que $\sqrt{2}$ est adhérent à $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 2.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée. Montrer que $\sup(A)$ est adhérent à $A$.

**Exercice 3.** Déterminer si 0 est adhérent aux parties suivantes de $\mathbb{R}$ :

1. $\{0\}$
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
5. $\left\{ \frac{1}{2} + n \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$
6. $[17, 42]$
7. $[-1, 1]$
8. $[-1, 0]$
9. $[-1, 0[$

**Exercice 4.** On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie sur $D$ non-majorée.
1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
2. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Écrire à l'aide de quantificateurs "$f$ ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$".
4. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**Exercice 5.** On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie sur $D \subset \mathbb{R}$ non-minorée.
1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.
2. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

**Exercice 6.**

1. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ en revenant à la définition.
2. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ en revenant à la définition.
3. On définit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en revenant à la définition.
4. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
   Étudier $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ en revenant à la définition.

**Exercice 7.** Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée.
1. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \tilde{\ell} \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \ell + \tilde{\ell}$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
3. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)g(x)) = +\infty$.

**Exercice 8.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $D$.
Montrer que si $f$ est bornée et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

**Exercice 9.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. (a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs $\lim_{x\to 0} f(x) \neq \ell$.
   (b) Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$.
2. Est-ce que $f$ admet une limite en 0 ?

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs "$f$ n'est pas majorée".
2. Montrer que si $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ alors $f$ n'est pas majorée.

**Exercice 11.** Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ f(x) > \frac{\ell}{2}$.

**Exercice 12.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire telle que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$.

**Exercice 13.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que $\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Écrire avec des quantificateurs "$f$ est périodique".
2. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 14.** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$
3. $\lim_{x\to +\infty} x^5 e^{-x^2}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\ln x + 7}{x^2+4}$
5. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$
7. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
8. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^2$
9. $\lim_{x\to +\infty} \left(x^7 - 2x^5 + 11\right)$
10. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+11}{x+1}$
11. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+\sqrt{2x^6+1}}{2x^3+\sqrt{x^5+1}}$
12. $\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^5+1}\right)$
13. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{3-2x-x^2}$
14. $\lim_{x\to 1, x>1} \frac{x^2-9}{3-2x-x^2}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$
17. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$
18. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$
19. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
20. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi x - \cos\left(\ln x + e^x - 42 + \sqrt{x}\right)}{x}$

**Exercice 15.** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$
2. $\lim_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor$
3. $\lim_{x\to +\infty} \lfloor x \rfloor$
4. $\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
5. $\lim_{x\to 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

**Exercice 16.** On admet que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2\left(2x^2\right)}{x^4}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin e^x}{e^x}$
5. $\lim_{x\to +\infty} e^x \sin\left(e^{-x}\right)$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{10}\left(2x^{20}\right)}{\sin^{200}(3x)}$