

Analyse approfondie

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
2. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, 3ab + 3bc + 3ac \leq (a + b + c)^2$.

Exercice 3.

1. Résoudre $|x^2 - 1| < x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre $|x^2 - 4x + 3| = 2x + 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre $|2x| \geq x^2 - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Exercice 6.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$.

Exercice 7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément :

1. $[0, 1[\cap \mathbb{Q}$
2. $\mathbb{N}$
3. $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
4. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

Exercice 8. Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. On pose $A + B := \{a + b : a \in A \text{ et } b \in B\}$.
 - (a) Montrer que $A + B$ est non-vidé et majorée.
 - (b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. On pose $-A := \{-a : a \in A\}$.
 - (a) Montrer que $-A$ est non-vidé et minorée.
 - (b) Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$.
3. (a) Montrer que $A \cup B$ est non-vidé et majorée.
 - (b) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 9. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ de sorte que $\inf(A)$ et $\sup(B)$ existent.

1. Montrer que si $\inf(A) = \sup(B)$ alors $A \cap B$ contient au plus un élément.
2. Sous l'hypothèse que $\inf(A) = \sup(B)$, l'intersection $A \cap B$ peut-elle être vide ?

Exercice 10. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vidé et bornée. On pose $B := \{|x - y| : x, y \in A\}$.

1. Montrer que B admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 11. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est croissante alors f admet un point fixe, i.e. $\exists a \in [0, 1], f(a) = a$.

Indice : considérer $\{x \in [0, 1] : f(x) \geq x\}$.

Exercice 12. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide et majorée. Posons $M := \sup(A)$. Montrer que si $M \notin A$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $(M - \varepsilon, M) \cap A$ est infini.

Exercice 13.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
2. (a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
(b) En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 14.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor}{n^2}$.
2. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
3. Donner une démonstration alternative utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soient I et J deux intervalles.

1. Montrer que $I \cap J$ est un intervalle.
2. Montrer que si $I \cap J \neq \emptyset$ alors $I \cup J$ est un intervalle.
3. Montrer que l'hypothèse de la question précédente n'est pas superflue.

Exercice 16.

1. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle?
2. Le produit de deux nombres irrationnels est-il nécessairement irrationnel?
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, x + y \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, xy \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 17. Montrer que les nombres suivants sont irrationnels :

- | | |
|-------------------------------|--|
| (a) $\sqrt{3}$ | (f) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ |
| (b) $\sqrt{6}$ | (g) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ |
| (c) $\sqrt{11}$ | (h) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$ |
| (d) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{11}}$ | (i) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$. |
| (e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ | |

Exercice 18. Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 19. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$.

Exercice 20. Le nombre $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-\frac{n(n+1)}{2}} = 0.101001000100001000001 \dots$ est-il rationnel?

Exercice 21. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Montrer que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset \implies I \cap J = \emptyset$.

Exercice 22 (Difficile : irrationalité de π).

1. Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k r^{2n-2k} f^{(2k+1)}(x).$$

(on peut remarquer que la somme ci-dessus est finie puisque f est un polynôme).

- (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.
 - (c) Montrer que $F''(x) = -r^2 F(x) + r^{2n+2} f(x)$.
 - (d) Calculer $\frac{d}{dx} (F'(x) \sin(rx) - rF(x) \cos(rx))$.
 - (e) En déduire une expression de $\int_0^1 f(x) \sin(rx) dx$.
2. Montrer que $\forall r \in (0, \pi], r \in \mathbb{Q} \implies (\sin(r) \notin \mathbb{Q} \text{ or } \cos(r) \notin \mathbb{Q})$.
 3. En déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.