Université d'Angers – 2022/2023

Analyse approfondie

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1. Écrire en extension l'ensemble suivant :

$$\left\{n \in \mathbb{Z} \;:\; \sqrt{2} < n < 2\pi\right\}.$$

Exercice 2. Montrer que

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 4x - y = 1\right\} = \{(t+1, 4t+3) \;:\; t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3. Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 4. Représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $A \times B$ où $A, B \subset \mathbb{R}$ sont :

1. $A = \{0\}$ et $B = [0, 1]$,
2. $A = \{0, 1\}$ et $B = [2, 3]$,
3. $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ et $B = \{0, 1, 2\}$,
4. $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$,
5. $A = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$ et $B = [0, 1]$,
6. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \varnothing$.

Exercice 5. Posons $D \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R} \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Existe-t-il $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$?

Exercice 6. Montrer que $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Écrire les énoncés suivants formellement à l'aide de quantificateurs.

1. f est constante.
2. f n'est pas constante.
3. f est nulle.
4. f s'annule.
5. f est 2π-périodique.
6. f est croissante.
7. f n'est pas croissante.
8. f est strictement croissante.

Exercice 8. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in D$.
Pour chacun des énoncés suivants : exprimer en français la signification de l'énoncé puis donner sa négation.

(i) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \leq M$.
(ii) $\forall x \in D,\ f(x) \leq f(a)$.
(iii) $\forall x \in D,\ f(x) > 0 \implies x \leq 0$.
(iv) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Exercice 9. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \mathbb{R}\setminus A \end{array}$$

Exercice 10. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x} \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est bijective et déterminer la réciproque de f.

Exercice 11. Construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 12. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset S^1$ où $S^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2=1\right\}$.
2. Est-ce que $(-1,0) \in \mathrm{Im}(f)$?
3. On considère $(x_0,y_0) \in S^1 \setminus \{(-1,0)\}$.
   (a) Quelle est la pente de la droite passant par $(-1,0)$ et (x_0,y_0) ? On la note m.
   (b) Calculer $f(m)$.
4. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$.
3. Montrer que $g : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

Exercice 14. Soit $f : A \to B$ une fonction.
Montrer que f est injective si et seulement si $\forall E, F \in \mathcal{P}(A),\ f(E) \cap f(F) = f(E \cap F)$.

Exercice 15. On considère une fonction $f : A \to B$.
Pour chacune des propriétés suivantes, dire si on peut en déduire que f est injective ou que f est surjective.

1. $\forall y \in B,\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.
2. $\forall y \in B,\ f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément.
3. $\forall y \in \mathrm{Im}(f),\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$ alors $a = 0$.

Exercice 17. On rappelle que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$.
2. Montrer que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \implies a = c$ et $b = d$.

Exercice 18. Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$.

Exercice 19. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 20 (Division euclidienne)**.** Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = qd + r$ et $0 \leq r < d$.

Exercice 21. Montrer que si n est la somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

Exercice 23. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $f(2) = 2$ et

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ f(pq) = f(p)f(q).$$

On rappelle que f est strictement croissante si $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x < y \implies f(x) < f(y)$.

Exercice 24. On admet que $\mathbb{N}$ est bien ordonné : toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. En déduire qu'il n'existe pas d'entier compris strictement entre 0 et 1.

Exercice 25. Que penser de la démonstration suivante ?
On veut montrer que pour tout $n \geq 2$, n points distincts du plan sont toujours alignés.

- Initialisation au rang $n = 2$: deux points du plan se trouvent toujours sur une même droite.
- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain $n \geq 2$.
  Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ $n + 1$ points du plan. Par hypothèse de récurrence :
  - $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se trouvent sur une même droite D.
  - $A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ se trouvent sur une même droite $\tilde{D}$.

  Puisque $A_2, A_3, \ldots, A_n$ se trouvent sur D et sur $\tilde{D}$, on a que $D = \tilde{D}$.
  Donc $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés. ■

Exercice 26. Montrer que parmi 42 entiers distincts, on peut toujours en trouver deux distincts a et b tels que $b - a$ est un multiple de 41.

Exercice 27. Montrer que parmi 5 entiers distincts, il y en a toujours trois distincts dont la somme est divisible par 3.

Exercice 28. On considère un damier 10×10.
À l'étape initiale, on colorie 9 cases du damier. Puis, on passe d'une étape à la suivante en coloriant chaque case adjacente à au moins deux cases déjà coloriées.
Existe-t-il une configuration initiale permettant de colorier entièrement le damier après un nombre fini d'étapes ?

Exercice 29. On considère un coloriage de $\mathbb{R}^2$ par deux couleurs[1].
Montrer que l'on peut trouver un rectangle dont les quatre sommets ont la même couleur.

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout choix de $n + 1$ nombres distincts dans $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, il en existe deux premiers entre eux.

[1] i.e. une fonction $\mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$.